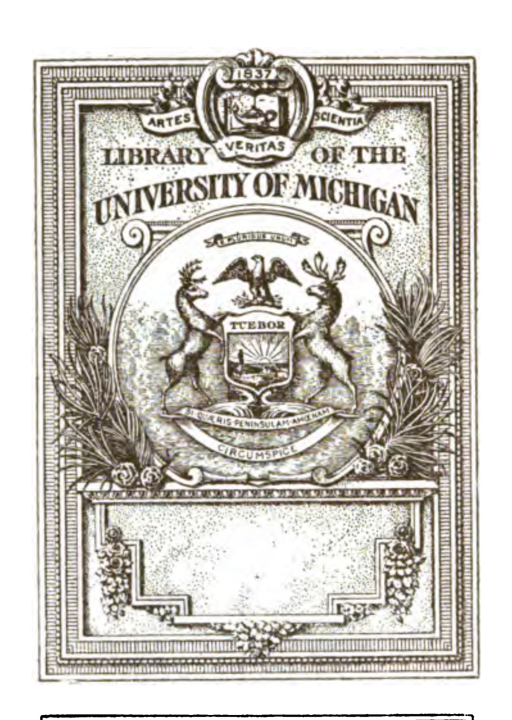
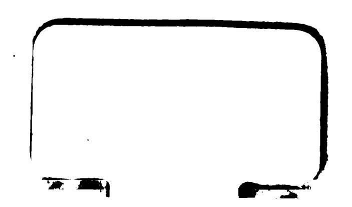



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



COURS

DE STATIQUE

[illegible]

Alexander Ziwet

COURS
DE STATIQUE

COMPRENANT

Les Éléments de la Statique graphique
et du Calcul des Moments d'inertie

A L'USAGE

DES

ÉLÈVES ARCHITECTES ET INGÉNIEURS

Professé à l'École des Beaux-Arts

PAR

Charles Emile Ernest called
CARLO BOURLET
Docteur ès sciences,
Professeur à l'École nationale des Beaux-Arts.



PARIS
C. NAUD, EDITEUR
3, RUE RACINE, 3

1902

Prof. Alex. Ziwet
2-26-1923

PRÉFACE

Ce volume est la seconde partie du Cours que je professe à l'École des Beaux-Arts, rédigé par mon élève, M. Meysson. Il comprend les éléments de la Statique, de la Statique graphique et du Calcul des moments d'inertie des aires planes.

On y chercherait en vain des méthodes très nouvelles ou originales, car mon but unique en le composant a été de faire un cours très simple, accessible à des jeunes gens peu exercés en mathématiques. J'ai, avant tout, voulu faire des leçons de *mécanique*, en laissant volontairement de côté les développements géométriques sur la théorie des vecteurs, fort intéressants en eux-mêmes, mais d'une utilité pratique très contestable.

L'élégance mathématique a souvent été sacrifiée pour faire place aux méthodes terre à terre, car je n'ai pas voulu oublier un seul instant que ce livre était destiné à des constructeurs et non à des théoriciens. Ainsi, par exemple, immédiatement après avoir donné la composition des forces concourantes, j'aurais pu exposer les premiers

principes de la Statique graphique pour en déduire brièvement la composition des forces parallèles. J'ai cru ne pas devoir le faire et conserver la vieille méthode classique qui habitue les élèves au maniement des compositions et décompositions élémentaires, si utiles en pratique. Le cas des forces parallèles est trop important en Construction pour qu'on ne lui donne pas une place à part dans un cours qui s'adresse à de jeunes architectes.

Comme je l'ai dit plus haut, ce volume est formé de mes leçons notées par un de mes élèves. La rédaction se ressent parfois des longueurs et des répétitions inévitables dans un cours oral. J'ai pensé qu'il valait mieux y toucher le moins possible pour ne pas diminuer la clarté de l'exposition. Ainsi, on trouvera peut-être fastidieux les détails de la démonstration du théorème de Varignon ; mais si l'on réfléchit à l'importance de cette proposition, si on considère que les élèves auxquels elle s'adresse sont peu habitués au maniement des quantités affectées de signes, on se rendra compte que l'énumération lente des divers cas a sa raison d'être pour habituer les élèves à appliquer correctement ce théorème.

En Statique graphique, je me suis contenté de donner la méthode principale, accompagnée de nombreux exemples d'application. Mon but n'était pas de faire un cours complet de Statique graphique, et par suite de Construction, mais uniquement

de donner une solide introduction à l'étude de cette science. J'ai surtout cherché à formuler des règles précises, faciles à appliquer, que l'élève pourra suivre docilement dans l'exécution des épures.

Pour compléter certains points intéressants, j'ai ajouté, par-ci, par-là, quelques petits paragraphes que je ne professe pas à l'École des Beaux-Arts. Ils sont imprimés en caractères plus fins et les numéros correspondants sont marqués d'astérisques.

Quelques-unes des données numériques des exemples traités ont été empruntées à l'excellent *Cours de Stabilité des Constructions,* professé par M. J.-J. Pillet, à l'École spéciale d'architecture.

Carlo BOURLET

Paris, décembre 1901.

COURS
DE STATIQUE

INTRODUCTION

1. ***Définitions.*** — Point matériel. — On appelle point matériel une portion de matière assez petite pour qu'on puisse négliger ses dimensions.

2. Corps solide. — Un corps solide est un ensemble de points matériels liés les uns aux autres, de telle sorte que leurs distances mutuelles restent invariables.

Nous supposerons, dans la suite, que les corps solides sont absolument indéformables quelles que soient les forces qui agissent sur eux.

En réalité, il n'existe pas dans la nature de corps absolument indéformables mais il y en a beaucoup, tels la pierre, le fer, le bois, qui ne se déforment que très peu lorsque les efforts auxquels on les soumet ne sont pas très grands, on peut, alors, dans une première étude, négliger ces déformations.

3. Force. — Une force est une cause quelconque de mouvement. Mais on conçoit très bien qu'on peut avoir l'idée de force sans production de mouvement pourvu qu'on puisse imaginer la possibilité du mouvement.

Il y a à considérer dans toute force quatre éléments qui sont : le *point d'application*, la *ligne d'action*, le *sens* et l'*intensité*.

1° *Le point d'application* est le point matériel sur lequel la force agit.

2° *La ligne d'action* est la droite indéfinie suivant laquelle ce point se déplacerait si la force le mettait en mouvement.

3° *Le sens* est la direction de la *ligne d'action* suivant laquelle la force tend à déplacer le point matériel sur lequel elle agit.

4° *L'intensité* d'une force résulte de sa comparaison avec une autre force prise pour unité. C'est la mesure de la force.

4. ***Représentation graphique d'une force.*** — Pour représenter une force, on se sert d'un segment. Soit (fig. 1) A le point d'application de la force ; elle est représentée en grandeur, en direction et en intensité par le segment AF, ayant pour origine le point d'application A, pour ligne d'action la ligne d'action de la force, pour sens le sens de la force et pour longueur une longueur proportionnelle à l'intensité de la force.



Fig. 1. Fig. 2.

En général, on met une flèche au bout du segment AF pour marquer le sens dans lequel agit la force ; mais il vaut mieux, surtout dans les épures graphiques, mettre la flèche au milieu du segment AF (fig. 2) et limiter l'extrémité de la force par un petit trait transversal.

Pour représenter l'intensité d'une force on se sert d'une échelle de forces : on convient que l'unité de

force est représentée par une longueur arbitraire choisie d'avance.

Ainsi, supposons que l'unité de force soit le centimètre, la force AF (fig. 2) est égale à autant de fois la force unité qu'un centimètre est contenu dans la longueur AF.

5. *Pesanteur.* — La force qu'on rencontre le plus souvent est la *pesanteur*.

Lorsqu'on abandonne un corps à lui-même ce corps tombe suivant une verticale, c'est-à-dire suivant une ligne normale à la surface des eaux tranquilles. Il résulte de là que tout point matériel est soumis à une force dirigée suivant la verticale. Cette force est ce qu'on appelle la *pesanteur*.

L'intensité de cette force est le *poids* du point matériel.

6. *Unité de force.* — On prend d'ordinaire comme unité de force le *kilogramme*, c'est-à-dire le poids d'un décimètre cube d'eau distillée, à la température de 4°, pesée dans le vide et au niveau de la mer.

7. *Mesure d'une force.* — Pour mesurer une force, on la compare à l'unité de force, c'est-à-dire au kilogramme.

Dynamomètres. — Pour comparer les forces entre elles, on compare les effets qu'elles produisent sur un même corps déformable, appelé *dynamomètre*.

Il en existe de plusieurs espèces; nous décrirons seulement le peson à ressort.

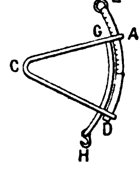


Fig. 3.

Cet instrument (fig. 3) se compose d'un ressort d'acier coudé ACD et de deux arcs métalliques. L'un d'eux, fixé en D, passe librement dans une ouverture pratiquée en A

dans la branche AC ; l'autre fixé en G passe à travers une ouverture pratiquée dans la branche CD. Le premier arc se termine par un anneau E destiné à soutenir l'appareil, et le second par un crochet H auquel on peut suspendre des poids ou appliquer les forces à mesurer.

Graduation de l'appareil. — Si l'on suspend au crochet H successivement des poids de 1, 2, 3..... kilogrammes, l'action de la pesanteur déterminera une flexion du ressort de plus en plus grande, et l'on pourra graduer l'appareil en marquant, aux points de l'arc AD où arrive successivement l'extrémité G, des traits accompagnés de nombres indiquant les poids employés.

La graduation faite, si l'on exerce sur le ressort des efforts capables d'amener la branche supérieure CA vis-à-vis les divisions 1, 2, 3..... on dira que les forces qui déterminent ces flexions sont des forces de 1, 2, 3... kilogrammes, ce qui signifie que leurs effets sont identiques à ceux produits sur l'appareil par des poids de 1, 2, 3,... kilogrammes.

8. ***Forces en équilibre.*** — Un système de forces qui agissent sur un corps solide est dit *en équilibre* si l'état du corps solide ne change pas lorsqu'on supprime toutes ces forces.

Inversement, on peut appliquer à un corps solide un système de forces en équilibre sans changer son état.

9. Équilibrante. — Etant donné un système de forces s'il existe une force unique telle qu'en la joignant au système des forces données, on obtienne un nouveau système en équilibre, cette force est dite l'*équilibrante* du système donné.

Il n'existe pas toujours, comme nous le verrons plus loin, une équilibrante, pour un système de forces quelconque.

10. *Théorème.* — *Si deux systèmes de forces admettent la même équilibrante, on peut, sans changer l'état du corps solide sur lequel ces forces agissent, remplacer l'un des systèmes par l'autre.*

Soit un système S qui agit sur un corps solide et qui admet une équilibrante E. Supposons qu'il existe un second système S′ qui admette la même équilibrante E. Démontrons qu'on peut remplacer le système S par le système S′.

Le corps solide étant soumis au système S, faisons agir sur lui le système formé par S′ et E. Ce système S′ + E étant en équilibre, on a le droit de le faire (n° **8**) sans changer l'état du corps.

Le corps solide est alors soumis aux systèmes S, S′ et à l'équilibrante E.

Mais, par hypothèse, le système S et la force E se font équilibre, on peut donc supprimer le système S et la force E (n° **8**) sans changer l'état du corps et il ne reste que le système S′.

On peut donc, sans changer l'état du corps solide, remplacer le système de forces S par le système S′ admettant la même équilibrante E.

11. *Systèmes équivalents.* — Deux systèmes de forces sont dits *équivalents* si on peut les remplacer l'un par l'autre.

Les systèmes S et S′ du théorème précédent sont *équivalents.*

12. RÉSULTANTE. COMPOSANTES. — Etant donné un système de forces s'il existe une force *unique* équiva-

lente au système, cette force est ce qu'on appelle *la résultante* du système.

Les forces données sont *les composantes*.

13. ***Principes expérimentaux.*** — La mécanique étant une science dont l'origine est expérimentale, repose sur quelques principes qu'on doit admettre sans démonstration et qu'on doit considérer comme résultant de l'expérience.

La plupart sont d'ailleurs si simples qu'on les admet sans difficulté.

14. Principe I. — *Lorsque deux forces sont appliquées au même point matériel, elles se font équilibre si elles sont égales et directement opposées.*

Dans tous les autres cas, elles ne se font pas équilibre et admettent une résultante unique appliquée au même point.

15. Conséquence I. — Etant donné un système de forces S, le système S′, formé par des forces appliquées aux mêmes points, mais respectivement égales et de sens contraire aux forces du système S, fait équilibre au système S.

16. Conséquence II. — *Si un système de forces admet une équilibrante, il admet une résultante qui est égale et directement opposée à l'équilibrante.*

En effet, soit un système de forces S qui admet une équilibrante E, et soit R la force égale à E, directement opposée et appliquée au même point.

Le système S et la force R ont même équilibrante E, le système S et la force R sont donc *équivalents* et par conséquent R est la *résultante* du système S (n° **10**).

17. Principe II. — *Deux forces égales, directement opposées et appliquées en deux points différents d'un corps solide se font équilibre* (fig. 4).

Fig. 4.

Il faut évidemment que leur ligne d'action commune soit la droite qui joint les deux points.

18. Principe III. — *Lorsqu'un corps solide peut tourner librement autour d'un axe fixe et qu'il n'est soumis qu'à une seule force, perpendiculaire dans l'espace avec l'axe et qui ne rencontre pas cet axe, le corps n'est pas en équilibre.*

Ainsi, soit (fig. 5) un corps solide tournant librement autour d'un axe fixe xy et soumis à une seule force AF rectangulaire dans l'espace avec xy ; si la ligne d'action de la force AF ne rencontre pas xy, le corps ne peut pas être en équilibre.

Fig. 5.

19. ***Théorème I.*** — *On peut transporter une force qui agit sur un corps solide, en un point quelconque de sa direction pourvu que ce point soit invariablement lié au corps solide.*

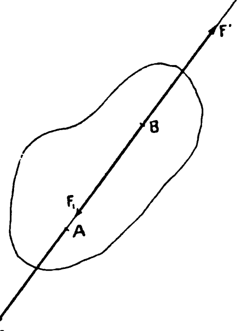


Fig. 6.

En effet, soit AF (fig. 6) une force appliquée en un point A d'un corps solide, et soit B un point quelconque pris sur la direction de cette force et invariablement lié au point A. Appliquons en B,

suivant la droite AB, deux forces BF_1 et BF′ égales à AF et opposées : comme ces forces se font équilibre, l'état du corps ne sera pas modifié (n° **8**).

Mais les deux forces AF et BF′ se font équilibre, on peut donc les supprimer (n° **8**) et il ne reste que la force BF_1, laquelle peut être regardée comme n'étant autre que la force AF dont le point d'application aurait été transporté en B.

Le théorème est donc démontré.

20. ***Théorème II*** (RÉCIPROQUE DU PRINCIPE II). — *Si deux forces, appliquées en deux points différents d'un corps solide, se font équilibre, elles sont égales, directement opposées et dirigées suivant la droite qui joint ces deux points.*

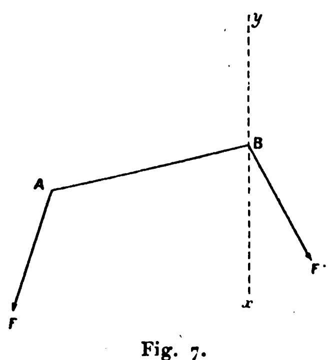
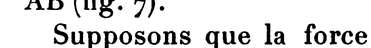


Fig. 7.

En effet, soient deux forces AF et BF′ appliquées en deux points A et B, d'un corps solide ; ces deux forces, par hypothèse, se font équilibre, démontrons qu'elles sont égales, directement opposées et dirigées suivant la droite AB (fig. 7).



Supposons que la force AF ne soit pas dirigée suivant AB, les deux droites AF et AB déterminent alors un plan. Par le point B menons une droite xy perpendiculaire au plan BAF. Le corps étant en équilibre, nous ne ferons que renforcer son équilibre en fixant tous les points de la droite xy. Dès lors, le corps ne peut que tourner autour de l'axe fixe xy. Mais le point B étant fixe, la force BF′, appliquée au point B, est détruite ; et on

a un corps en équilibre, qui peut tourner autour d'un axe xy et qui est soumis à une seule force AF perpendiculaire à l'axe, et ne le rencontrant pas, ce qui est impossible (n° **18**).

Il faut donc que la force AF soit dirigée suivant AB.

On démontrerait de même que la force BF′ doit être dirigée suivant AB en menant par le point A un axe perpendiculaire aux deux droites AB et BF′.

Il reste à prouver que AF et BF′ sont égales et directement opposées. Puisque la ligne d'action de AF passe par B, nous pouvons, sans changer l'état du corps, transporter la force AF en BF_1 (fig. 6). Les deux forces BF_1 et BF′ étant appliquées en un même point, d'après le principe I (n° **14**), doivent être égales et directement opposées pour se faire équilibre. Il en est donc de même de AF et BF′.

21. ***Théorème III.*** (Réciproque du théorème I). — *Si, sans changer l'état du corps solide sur lequel elle agit, on peut transporter une force parallèlement à elle-même, le nouveau point d'application est un point de la ligne d'action de cette force.*

Supposons que sans changer l'état du corps sur lequel elle agit, on puisse transporter la force AF (fig. 6) en BF_1. Une force BF′ égale et directement opposée à BF_1 équilibrera donc aussi bien AF que BF_1. Les deux forces AF et BF′ sont donc (n° **20**) directement opposées, ce qui exige que B soit un point de la ligne d'action de AF.

22. Corollaire. — *On peut transporter deux forces concourantes parallèlement à elles-mêmes en un point de la direction de leur résultante, et, réciproquement,*

si on peut transporter deux forces concourantes, parallèlement à elles-mêmes, leur nouveau point d'application est un point de la ligne d'action de leur résultante.

Soient deux forces concourantes AF, AF′ (fig. 8). Ces deux forces, si elles ne sont pas égales et directement opposées, ont une résultante d'après le principe I (n° **14**), soit AR cette résultante. On peut remplacer les deux forces AF, AF′ par la force AR. Mais cette force AR peut être transportée en BR_1 (n° **19**) en un point quelconque B de sa direction. Au point B menons deux forces BF_1 et BF'_1 respectivement parallèles et égales aux forces AF et AF′. La figure formée par les trois forces BR_1, BF_1, BF'_1 est la même que la figure formée par les trois forces AR, AF, AF′ et par conséquent BR_1 est la résultante des forces BF_1, BF'_1 et on peut remplacer les forces AF, AF′ par les forces BF_1, BF'_1.

Fig. 8.

Réciproquement, soient deux forces concourantes AF et AF′ (fig. 8) que l'on peut transporter en BF_1, BF'_1 parallèlement à elles-mêmes; démontrons que la résultante des deux forces AF, AF′ est dirigée suivant AB. En effet, soit AR la résultante des forces AF, AF′ et soit E_1 l'équilibrante des forces BF_1, BF'_1. La force E_1 fait aussi équilibre aux forces AF et AF′, donc elle équilibre leur résultante AR et par conséquent la résultante AR et l'équilibrante E_1 sont deux forces égales et opposées, elles sont dirigées suivant la droite AB (n° **20**).

CHAPITRE PREMIER

COMPOSITION DES FORCES CONCOURANTES ET PARALLÈLES

§ 1. Composition de deux forces concourantes

23. Principe IV. — *Deux forces appliquées en un même point et ayant même ligne d'action ont une résultante égale à leur somme géométrique, c'est-à-dire égale à leur somme si les forces sont de même sens, et égale à leur différence et dirigée dans le sens de la plus grande des deux forces si les forces sont de sens contraires.*

Nous admettrons ce principe comme résultant de l'expérience. En fait, on pourrait dire qu'il découle de la définition même de la mesure de l'intensité d'une force.

Remarque. — Lorsque les deux forces sont égales et de sens contraires, elles se font équilibre, on dit que la résultante est *nulle*.

24. ***Conséquence.*** — *Plusieurs forces appliquées à un corps solide et ayant même ligne d'action ont une résultante égale à leur somme géométrique.*

Car on peut d'abord supposer que toutes ces forces sont appliquées en un même point en les transportant au besoin le long de leur ligne d'action (n° **19**). Puis, il suffit de les composer deux par deux pour obtenir finalement une résultante unique.

Réciproquement, on peut toujours remplacer une force par plusieurs autres ayant même ligne d'action et dont la somme géométrique est égale à la force en question.

25. Mesure algébrique de la résultante. — Plusieurs forces ayant même ligne d'action, choisissons sur cette ligne d'action un sens positif. Soient F_1, F_2, F_3, ... les *mesures algébriques* (1) de ces forces et R la mesure algébrique de la résultante. D'après le théorème de Chasles, la résultante des forces n'étant autre chose que la résultante *géométrique* des segments qui les représentent graphiquement, *la mesure algébrique de la résultante est égale à la somme des mesures algébriques des forces données.* On a donc :

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$$

26. Théorème. — *La résultante de deux forces égales et appliquées en un même point est dirigée suivant la bissectrice de l'angle de ces deux forces.*

En effet, soient deux forces AF, AF′ appliquées en un point A et égales en intensité. Démontrons que la résultante de ces deux forces est dirigée suivant la bissectrice de l'angle FAF′ (fig. 9).

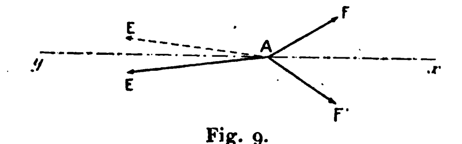


Fig. 9.

Pour cela montrons que l'équilibrante des deux forces AF, AF′ est dirigée suivant cette bissectrice ; soit E cette équilibrante.

(1) Voir la première partie de ce Cours : *Cours de Mathématiques.*

Supposons que l'équilibrante E ne soit pas dirigée suivant la bissectrice de l'angle des deux forces et menons cette bissectrice xy. Faisons tourner la figure de 180° autour de xy : la force AF vient en AF′ et la force AF′ en AF, la force AE vient occuper par rapport à l'axe xy une position symétrique AE′. Le système des deux forces AF, AF′ n'a pas changé, puisque les deux forces sont égales ; mais l'équilibrante de ces deux forces a changé, de AE elle est devenue AE′ ce qui est impossible, un même système ne pouvant avoir deux équilibrantes, sans quoi il admettrait deux résultantes, ce qui est contraire au principe I (n° **14**).

27. ***Théorème.*** — *Si on considère quatre forces représentées géométriquement par les quatre côtés d'un losange et deux par deux issues de deux sommets opposés du losange, ces quatre forces se font équilibre* (fig. 10).

En effet, soient AF, AF′, BF, BF′ quatre forces égales telles que la figure AFBF′ soit un losange. La droite AB est la bissectrice commune des angles FAF′ et FBF′. La résultante R des deux forces égales appliquées en A est dirigée suivant la bissectrice AB (n° **26**) ; la résultante R′ des deux forces égales appliquées en B est dirigée suivant la même bissectrice. Menons FF′ et faisons tourner la figure de 180° autour de FF′ : le sommet B vient en A et le sommet A en B ; AF vient en BF et BF en AF, AF′ vient en BF′ et BF′ en AF′, AR vient occuper une position BR_1 égale et direc-

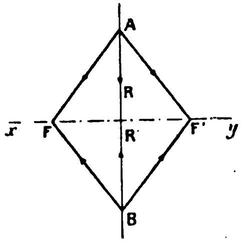


Fig. 10.

tement opposée à AR et, de même, BR′ prend une situation BR'_1 égale et directement opposée à BR.

Par cette rotation, le système des quatre forces égales n'a pas changé; il faut donc que les résultantes n'aient pas changé, ce qui exige que BR_1 soit identique à BR′ et AR'_1 identique à AR. Or, comme BR_1 est égale et directement opposée à AR, il en est de même de BR′. Les deux forces AR et BR′ se font donc équilibre. Le système est en équilibre, ce qui démontre le théorème.

28. *Théorème.* — Résultante de deux forces concourantes. — *Deux forces concourantes ont une résultante qui est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces.*

1° Direction de la résultante : soient AF, AF′ (fig. 11) deux forces appliquées au même point A, et supposons qu'elles aient une commune mesure *f* contenue, par exemple, trois fois dans la force AF et deux fois dans la force AF′. Partageons AF en trois parties égales AC, CD, DF et AF′ en deux AB, BF′ égales aux précédentes.

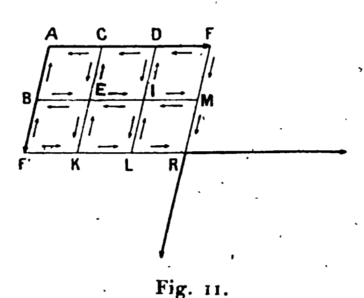


Fig. 11.

Construisons sur les lignes AF, AF′ le parallélogramme AFRF′, menons, par les points de division des lignes AF, AF′, les parallèles CK, DL, BM à ces lignes qui déterminent par leurs intersections des losanges égaux et supposons tous les points de la figure ainsi formée invariablement liés entre eux.

Aux points C et B, dans les sens indiqués par les flèches, appliquons quatre forces égales à la commune mesure f; nous pouvons le faire sans modifier l'état d'équilibre du corps puisque (n° **27**) nous introduisons des forces en équilibre. Faisons de même aux points E et D, I et F, M et L, I et K, E et F'.

Or les trois forces égales à f et agissant suivant AF peuvent être remplacées par une force unique égale à leur somme F et faisant par suite équilibre à la force F puisqu'elle est de sens opposé. De même, les deux forces égales à f et agissant suivant AF' peuvent être remplacées par une force unique égale à la force F' et lui faisant équilibre. D'autre part, les les forces égales à f et dirigées suivant CK, DL, BM se font équilibre deux à deux.

Le système reste donc sollicité par trois forces égales chacune à f agissant suivant F'R et deux forces égales aussi à f agissant suivant FR. Ces forces peuvent être remplacées, les premières par une force unique égale à F, les autres par une force unique égale à F', ces deux forces étant appliquées l'une et l'autre au point R (n° **24**).

On voit ainsi que les deux forces F et F' appliquées en A peuvent être, sans que l'état du système soit modifié, transportées parallèlement à elles-mêmes au sommet R du parallélogramme AFRF'.

Or on a démontré (n° **22**) que si l'on peut transporter deux forces concourantes parallèlement à elles-mêmes en un point, et cela sans changer l'état du corps, ce point est un point de la résultante.

Donc le point R est un point de la résultante. Mais cette résultante passe également par le point A ; elle est dirigée par conséquent suivant la diagonale AR du parallélogramme AFRF'.

2° Intensité de la résultante. — Nous venons d'établir que la résultante des forces F,F′ est dirigée suivant la diagonale AR du parallélogramme AFRF′ (fig. 12), nous allons maintenant démontrer que son intensité est représentée par la longueur AR de cette diagonale, et qu'elle est dirigée dans le sens AR.

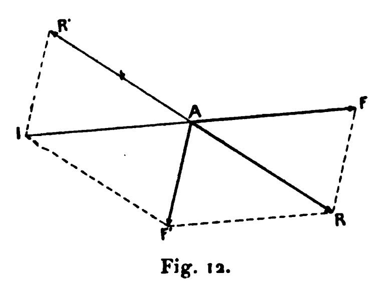


Fig. 12.

En A appliquons une force AR′ égale et directement opposée à la résultante dont on connaît la ligne d'action mais non l'intensité ; c'est l'équilibrante des forces AF, AF′. Les trois forces F, F′, R′ sont en équilibre et par suite l'une quelconque d'entre elles, F par exemple, est égale et directement opposée à la résultante des deux autres. La résultante des forces F′ et R′ est dirigée suivant la diagonale AI du parallélogramme construit sur AF′ et AR′ ; d'autre part, elle doit équilibrer AF par suite elle doit être directement opposée à AF et les trois points F,A et I sont en ligne droite.

La force AR′ est ainsi bien déterminée, car pour l'obtenir on doit faire la construction suivante : par F′ on mène une parallèle à AR qui coupe AF prolongée en I ; par I on mène ensuite une parallèle à AF′ qui coupe la droite AR en R′.

Ceci exige d'ailleurs que AR′ soit dirigée comme l'indique la figure, en sens contraire de AR.

La figure AR′IF′ étant un parallélogramme, on a :

$$AR' = IF'.$$

D'autre part, puisque AI est dans le prolongement

de AF, la figure AIF'R est aussi un parallélogramme, comme ayant ses côtés opposés parallèles, on a donc aussi :

$$IF' = AR,$$

et, par suite, $AR' = AR.$

Donc, l'équilibrante AR' est égale à la longueur AR de la diagonale ; il en est de même de la résultante qui a même intensité.

Par conséquent, l'intensité de la résultante R des deux forces F, F' est représentée par la longueur de la diagonale AR. Son sens est bien celui de A vers R puisque celui de AR' est le sens opposé.

29. ***Problème inverse.*** — *Décomposer une force en deux autres de directions données.*

Etant données une force représentée en direction et en intensité par un segment AF et deux directions Ax, Ay issues du point A et situées dans un même plan avec AF, nous nous proposons de décomposer AF en deux forces dirigées suivant les droites Ax, Ay (fig. 13).

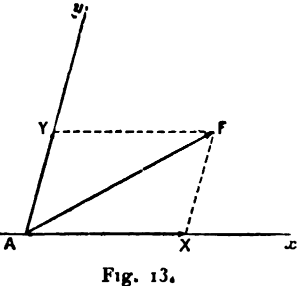


Fig. 13.

Il suffit de mener par le point F des droites FX, FY respectivement parallèles aux directions Ax, Ay. On formera ainsi un parallélogramme AXFY dont les côtés AX, AY représenteront les intensités des forces demandées.

AX, AY sont les *composantes* de AF suivant les directions Ax et Ay.

30. ***Conséquence I.*** — *Lorsqu'un corps solide peut*

tourner librement autour d'un axe fixe, sans glisser le long de cet axe, et qu'il est soumis à une seule force dont la direction ne rencontre pas l'axe ou qui n'est pas parallèle à l'axe, le corps n'est pas en équilibre.

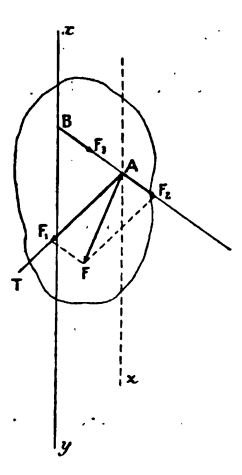


Fig. 14.

En effet, soit un corps solide pouvant tourner librement autour de l'axe xy (fig. 14) et soumis à une force unique AF appliquée en A dont la direction ne rencontre pas l'axe xy et qui n'est pas parallèle à cet axe.

Prenons un point B sur l'axe et menons la droite AB. Par le point A menons un plan perpendiculaire à l'axe xy; ce plan coupe le plan FAB suivant la droite AT. Dans le plan FAB, décomposons la force AF en deux autres de directions AT et AB (n° **29**) et soient AF_1 et AF_2 les deux forces obtenues. Transportons la force AF_2 parallèlement à elle-même au point B (n° **19**) en BF_3. Cette force BF_3 est détruite par la résistance du point fixe B et le corps se trouve soumis à une force unique AF_1 perpendiculaire dans l'espace avec l'axe. Cette force AF_1 ne peut pas être nulle car sans cela AF coïnciderait avec AF_2 et rencontrerait l'axe; de même AF_2 ne peut pas rencontrer l'axe car sans cela elle déterminerait avec cet axe un plan qui contiendrait AF. Le corps ne peut donc pas être en équilibre (n° **18**) et le théorème est démontré.

31. ***Conséquence II.*** — *Lorsqu'un corps qui peut tourner librement autour d'un axe fixe n'est soumis*

qu'à des forces qui rencontrent cet axe ou qui sont parallèles à cet axe, il est en équilibre.

Ceci est évident pour les forces dont la ligne d'action rencontre l'axe car on peut transporter leur point d'application au point de rencontre de la ligne d'action avec l'axe et chaque force est ainsi détruite par la résistance de l'axe.

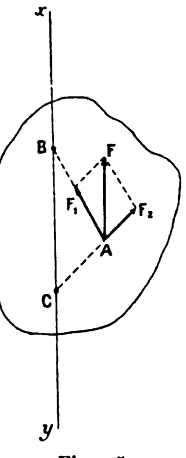


Fig. 15.

Considérons, en second lieu, une force AF (fig. 15) parallèle à l'axe fixe xy. Prenons sur cet axe deux points fixes arbitraires B et C. La force AF étant située dans le plan ABC, nous pouvons (nº **29**) la décomposer en deux autres AF_1 et AF_2 dirigées suivant AB et AC. Les points d'application de ces deux forces peuvent être respectivement transportés en B et C. Elles sont alors détruites par la résistance de l'axe.

32. ***Relations entre deux forces et leur résultante.*** — Soient deux forces concourantes AF, AF′ (fig. 16) et leur résultante qui est représentée par la diagonale AR du parallélogramme construit sur ces deux forces. Soit α l'angle des deux forces. Considérons le triangle AFR ; la trigonométrie donne la relation suivante :

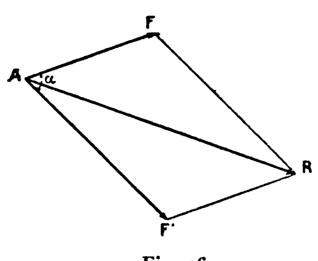


Fig. 16.

$$\overline{AR}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FR}^2 - 2\ AF.\ FR \cos(\widehat{AFR}) \quad (1)$$

Mais $AR = R$, $AF = F$, $FR = AF' = F'$;

de plus, l'angle $\widehat{AFR}$ est égal au supplément de α, on a donc

$$\cos(\widehat{AFR}) = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha,$$

car deux angles supplémentaires ont leurs cosinus égaux et de signes contraires.

Et la relation (1) peut s'écrire

$$R^2 = F^2 + F'^2 + 2FF'.\cos\alpha;$$

formule qui permet de calculer l'intensité de la résultante connaissant les deux composantes et l'angle qu'elles forment. On en tire

$$R = \sqrt{F^2 + F'^2 + 2FF'\cos\alpha}.$$

Exemple. — *On donne deux forces de 2 kg et 1 kg faisant entre elles un angle de 60°, trouver l'intensité de la résultante.*

On a, puisque $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,

$$R = \sqrt{4 + 1 + 2.2.\frac{1}{2}} = \sqrt{7} = 2{,}6 \text{ kg}.$$

33. La trigonométrie donne encore la relation suivante.

$$\frac{AR}{\sin(AFR)} = \frac{AF}{\sin(ARF)} = \frac{RF}{\sin(FAR)}. \quad (1)$$

Mais l'angle $\widehat{FAR}$ est l'angle que font les directions des forces R et F, on peut donc écrire

$$\sin(\widehat{FAR}) = \sin(\widehat{F,R}).$$

L'angle $\widehat{ARF}$, qui est égal à l'angle $\widehat{F'AR}$ comme

alternes-internes, est égal à l'angle des forces R et F′, donc

$$\sin(\widehat{ARF}) = \sin(\widehat{R,F'}).$$

L'angle $\widehat{AFR}$, qui est le supplément de l'angle $\widehat{F'AF}$, est le supplément de l'angle des forces F et F′.

La relation (1) devient alors

$$\frac{R}{\sin(F,F')} = \frac{F}{\sin(R,F')} = \frac{F'}{\sin(R,F)}.$$

Donc, si l'on considère deux forces F,F′ appliquées au même point dans des directions différentes, et leur résultante R, on voit que *chaque force est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les deux autres.*

34. Conséquence. — *Conditions d'équilibre de trois forces concourantes.*

Considérons trois forces appliquées au même point O (fig. 17); soient F_1, F_2, F_3 ces trois forces.

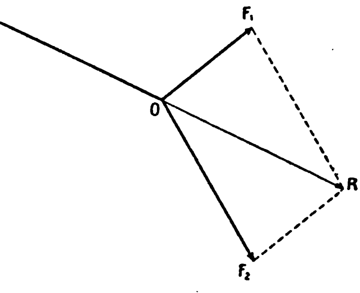


Fig. 17.

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que l'une quelconque d'entre elles, F_3 par exemple, soit égale et directement opposée à la résultante OR des deux autres. Cette condition entraîne d'abord que *les trois forces soient situées dans un même plan* car F_3 devant être égale et direc-

tement opposée à OR est forcément dans le plan de F_1 et F_2.

De plus les relations qui viennent d'être établies (n° **33**) sont applicables aux trois forces R, F_1, F_2 et on a

$$\frac{R}{\sin(F_1,F_2)} = \frac{F_1}{\sin(R,F_2)} = \frac{F_2}{\sin(R,F_1)}. \qquad (1)$$

Mais on a

$$\sin(\widehat{R,F_2}) = \sin(180^\circ - \widehat{F_2,F_3}) = \sin(\widehat{F_2,F_3}),$$

car deux angles supplémentaires ont même sinus.

De même

$$\sin(\widehat{R,F_1}) = \sin(180^\circ - \widehat{F_1,F_3}) = \sin(\widehat{F_1,F_3});$$

et l'intensité de F_3 égale l'intensité de OR.

La relation (1) devient donc

$$\frac{F_3}{\sin(F_1,F_2)} = \frac{F_1}{\sin(F_2,F_3)} = \frac{F_2}{\sin(F_1,F_3)}. \qquad (2)$$

Chacune des trois forces est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les deux autres forces.

Réciproquement, si trois forces données sont situées dans un même plan et si elles satisfont à la relation (2) il peut arriver deux cas : ou la force F_3 est la résultante des forces F_1, F_2 ; ou la force F_3 est leur équilibrante. Mais pour qu'il y ait équilibre, il faut que la force F_3 ne soit pas située dans l'angle des forces F_1, F_2.

Les conditions d'équilibre de trois forces appliquées au même point sont donc :

1° *Que les trois forces soient situées dans un même plan.*

2° *Que les relations*

$$\frac{F_1}{\sin(F_2F_3)} = \frac{F_2}{\sin(F_1F_3)} = \frac{F_3}{\sin(F_1F_2)}$$

soient vérifiées, c'est-à-dire que chaque force soit proportionnelle au sinus de l'angle formé par les deux autres.

3° *Que l'une quelconque des trois forces ne soit pas située dans l'angle formé par les deux autres.*

Remarque. — Si cette troisième condition n'était pas remplie, les trois forces ne se feraient pas équilibre et l'une d'elles serait la résultante des deux autres.

§ 2. — Composition de plusieurs forces concourantes

35. ***Polygone des forces.*** — Soient un certain nombre de forces, quatre par exemple, appliquées au même point matériel O(fig. 18) et représentées en direction et en intensité par les segments OF_1, OF_2, OF_3, OF_4. Composons d'abord les forces OF_1 et OF_2 par la règle du parallélogramme des forces et nous obtiendrons ainsi leur résultante OR_1. Les deux forces OF_1 et OF_2 peuvent être supprimées et remplacées par la force OR_1. Nous composerons ensuite les forces OR_1 et OF_3 de la même manière et nous obtiendrons une résultante OR_2 qui remplacera les forces

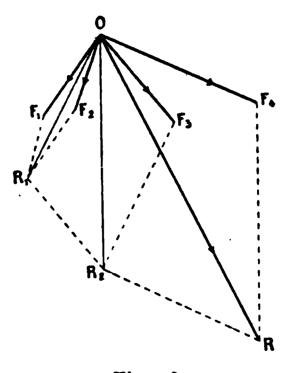


Fig. 18.

OR_1 et OF_3. Enfin nous composerons les forces OR_2 et OF_4 et nous obtiendrons la résultante OR qui remplacera toutes les forces données. Ce sera la *résultante* du système des forces données.

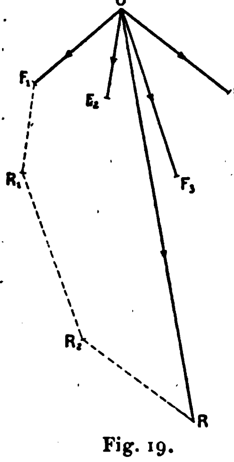


Fig. 19.

Il est facile de voir que la ligne OR ferme le contour d'un polygone dont les côtés sont respectivement égaux et parallèles aux droites qui représentent en direction et en intensité les forces données. Il suffit donc pour trouver la résultante de former le contour polygonal $F_1R_1R_2R$ en menant par l'extrémité de la première force F_1 la droite F_1R_1 égale et parallèle à la seconde force (fig. 19), puis, par l'extrémité R_1, la droite R_1R_2 égale et parallèle à la troisième force ; et ainsi de suite. On joint le point O à l'extrémité R de la dernière parallèle menée.

La figure $OF_1R_1R_2 \ldots R$ est, ce qu'on appelle le *polygone des forces.*

36. ***Condition géométrique d'équilibre.*** — Si le point R ne coïncide pas avec le point O, il y a une résultante unique ; si le point R coïncide avec le point O, c'est-à-dire si le polygone des forces se ferme, la résultante est nulle et les forces données se font équilibre. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour que plusieurs forces appliquées au même point soient en équilibre est que le polygone des forces se ferme.

Remarque. — Les forces ne sont pas nécessairement situées dans un même plan.

37. ***Cas particulier.*** — *Composition de trois forces appliquées au même point.* Soient trois forces appliquées au même point O (fig. 20) et dirigées suivant les droites OF_1, OF_2, OF_3 non situées dans le même plan.

Supposons que les longueurs OA, OB, OC représentent respectivement les intensités de ces forces. Sur OA, OB, OC, construisons un parallélépipède OBDAFREC.

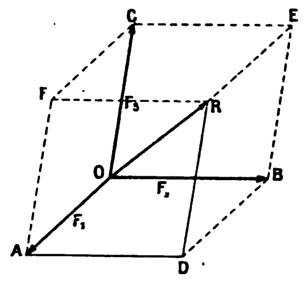


Fig. 20.

OR est la résultante des trois forces données. En effet, AD est égale et parallèle à OB, c'est-à-dire à F_2 et DR est égale et parallèle à OC ou F_3. Le contour OADR est donc le polygone des forces. OR est bien la résultante.

Donc, *la résultante de trois forces appliquées au même point, et dont les directions ne sont pas situées dans un même plan, est représentée en direction et en grandeur par la diagonale du parallélépipède construit sur les trois forces données.*

38. ***Problème inverse.*** — *Décomposition d'une force en trois autres de directions données.* Soit à décomposer la force R ayant pour intensité OR (fig. 20) et appliquée au point O en trois autres dirigées suivant les droites OF_1, OF_2, OF_3 non situées dans un même plan avec R et formant entre elles des angles quelconques.

On obtiendra les intensités de ces trois forces en

menant par le point R trois plans respectivement parallèles aux plans des directions données, prises deux à deux : ainsi nous menons par le point R des plans parallèles à F_2OF_3, à F_1OF_3 et à F_1OF_2.

Ces trois plans couperont les droites OF_1, OF_2, OF_3 aux points A, B, C et les longueurs, OA, OB, OC, représenteront les intensités demandées, car OR est ainsi la diagonale d'un parallélépipède ayant pour arêtes OA, OB, OC.

39. ***Théorème.*** — *Etant données plusieurs forces concourantes et leur résultante, la mesure algébrique de la projection de la résultante sur un axe quelconque est égale à la somme des mesures algébriques des projections des composantes*,

Ce théorème est une conséquence du théorème des projections établi en mathématiques : la mesure algébrique de la projection de la résultante de plusieurs segments sur un axe est égale à la somme des mesures algébriques des projections de ces segments sur cet axe.

40. ***Conditions analytiques d'équilibre.*** — On déduit de là les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre quelconque de forces appliquées à un point se fassent équilibre.

Pour que plusieurs forces appliquées au même point se fassent équilibre, il faut et il suffit que les sommes des mesures algébriques des projections de ces forces sur trois axes rectangulaires soient nulles.

En effet, soient des forces F_1, F_2, F_3,... appliquées en un même point O (fig. 21). Menons, par ce point, trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et projetons chacune des forces sur ces axes.

Désignons par X_1 la projection de F_1 sur Ox, par Y_1 et Z_1 ses projections sur Oy et Oz. De même appelons X_2, Y_2, Z_2, les projections de F_2 sur Ox, Oy, Oz, et ainsi de suite pour les autres forces.

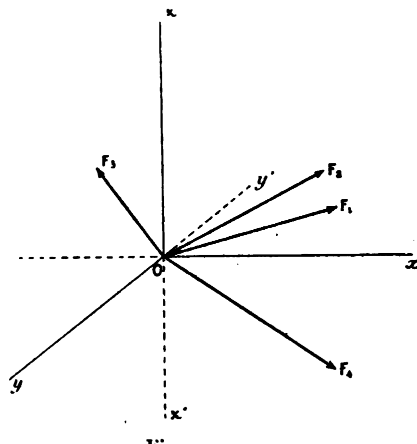


Fig. 21.

Soit OR la résultante des forces F_1, F_2, F_3.... et soient X, Y, Z les projections de cette résultante sur Ox, Oy, Oz.

D'après le théorème précédent (n° **39**) on a

$$\left.\begin{array}{l} X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \ldots\ldots \\ Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \ldots\ldots \\ Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

S'il y a équilibre, la résultante est nulle

$$R = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0$$

et les relations (1) deviennent

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \ldots\ldots = 0 \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \ldots\ldots = 0 \\ Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + \ldots\ldots = 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

La condition énoncée est donc nécessaire. Elle est aussi suffisante; car si les conditions (2) sont remplies, les projections de la résultante R sur Ox, Oy, Oz sont nulles et elle est nulle elle-même, car elle ne peut être perpendiculaire à la fois aux trois axes.

Remarque. — Dans le cas particulier où les forces sont toutes situées dans un même plan, il suffit de les projeter sur *deux* axes rectangulaires de ce plan.

§ 3. — Composition des forces parallèles.

41. *Composition de deux forces parallèles et de même sens.* — Soient les deux forces parallèles F, F′ (fig. 22), appliquées aux deux points A et B d'un corps solide. Suivant la droite AB, appliquons en A et B deux forces égales et opposées φ et φ' : ces deux forces se faisant équilibre, l'état du système ne sera pas changé.

Composons d'une part les forces F et φ, de l'autre les forces F′ et φ'. Les directions des résultantes AF_1 et BF_1' non parallèles et situées dans un même plan vont se rencontrer en un point O. Ce point étant supposé invariablement lié aux points A et B, on peut y transporter les points d'application des forces F_1 et F_1', ce qui donne F_2 et F_2'; puis on peut décomposer F_2, F_2' en deux forces suivant des directions parallèles à la droite AB et à la direction commune de AF et BF′. On obtient ainsi quatre forces φ_1, f, φ_1',

f'. Ces forces reproduisent celles appliquées primitivement en A et B, car les figures $A\varphi F_1 F$ et $O\varphi_1 F_2 f$ sont identiques, ainsi que les figures $B\varphi' F_1' F'$ et $Of' F_2' \varphi_1'$. Il en résulte que les deux forces φ_1 et φ_1' appliquées

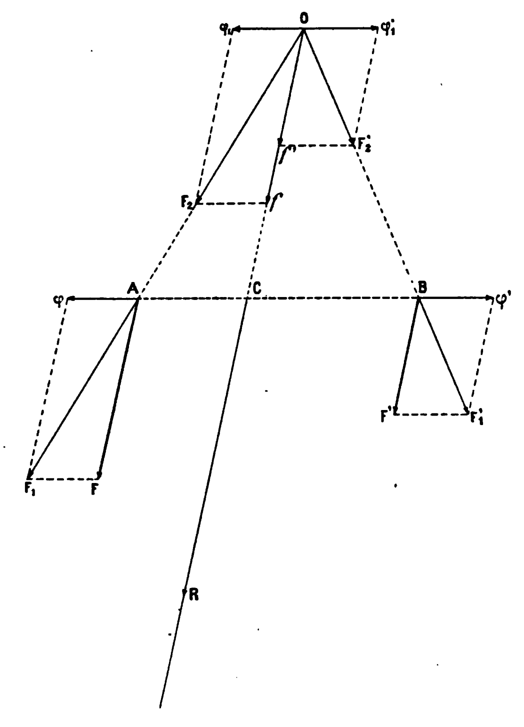


Fig. 22.

en O, égales aux forces φ et φ', sont égales et, comme elles sont directement opposées, elles se détruisent. Les deux forces f et f' se composent en une force

$$R = f + f' = F + F'$$

dont le point d'application peut être transporté en C,

ce dernier point étant supposé invariablement lié au corps.

R est la résultante des deux forces données F et F'. On voit qu'elle est égale à leur somme, leur est parallèle et agit dans le même sens qu'elles.

Il reste à fixer la position du point C sur la droite AB.

Or les triangles OF_2f, OAC ayant leurs côtés parallèles sont semblables et ils donnent

$$\frac{AC}{F_2f} = \frac{OC}{Of};$$

ce qui peut s'écrire, puisque $F_2f = O\varphi_1 = \varphi$ et que $Of = AF = F$,

$$\frac{AC}{\varphi} = \frac{OC}{F}. \qquad (1)$$

De même, les triangles semblables $Of'F_2'$, et OCB donnent

$$\frac{CB}{f'F_2'} = \frac{OC}{Of'};$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{CB}{\varphi} = \frac{OC}{F'}. \qquad (2)$$

Divisant membre à membre les égalités (1) et (2), il vient :

$$\frac{AC}{CB} = \frac{F'}{F}. \qquad (3)$$

Le point d'application C de la résultante partage la droite AB en parties inversement proportionnelles aux intensités des composantes.

Donc, *deux forces parallèles et de même sens ont une*

résultante égale à leur somme. Cette résultante leur est parallèle, agit dans le même sens qu'elles et rencontre la ligne qui joint leurs points d'application en un point, situé entre ces deux points d'application, qui partage cette ligne en deux parties inversement proportionnelles aux intensités des forces.

REMARQUE. — R étant l'intensité de la résultante et F et F′ les intensités des deux composantes, on a

$$R = F + F'.$$

La proportion (3) peut s'écrire, en intervertissant les moyens,

$$\frac{F'}{AC} = \frac{F}{CB}.$$

On en tire

$$\frac{F'}{AC} = \frac{F}{BC} = \frac{F + F'}{BC + AC} = \frac{R}{AB};$$

on a donc

$$\frac{F}{BC} = \frac{F'}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

On voit ainsi que *chacune des forces est proportionnelle à la distance des points d'application des deux autres.*

42. Problème inverse. — *Décomposer une force en deux autres forces parallèles et de même sens.*

Soit CR (fig. 22) une force donnée, le problème en question peut être posé de deux manières différentes.

1° *On se donne les points d'application* A *et* B *des deux composantes.*

Le problème revient à trouver les intensités F

et F′ des deux forces cherchées, ce qui se fait en appliquant la remarque qui précède. On devra avoir :

$$(1) \qquad \frac{F}{BC} = \frac{F'}{AC} = \frac{R}{AB}$$

d'où on tire les valeurs de F et F′ :

$$F = R.\frac{BC}{AB}, \qquad F' = R.\frac{AC}{AB}.$$

2° *On se donne l'une des deux composantes* F *et son point d'application* A.

Dans ce cas, ce qu'il faut trouver, c'est l'intensité F′ de la seconde force et son point d'application B, sur la droite AC.

D'abord le problème n'est possible que si F est plus petite que R. D'ailleurs, comme

$$R = F + F',$$

on en tire

$$F' = R - F.$$

On connaît ainsi F′. Ensuite, la relation (1) donne

$$AB = AC.\frac{R}{F'} = AC\frac{R}{R - F};$$

ce qui fait connaître la longueur AB. Il suffit donc de porter sur AC à partir de A, du même côté que C, la longueur AB ainsi calculée.

43. ***Composition de deux forces parallèles, de sens contraires et d'intensités différentes.*** — Soient les deux forces parallèles F, F′ (fig. 23) appliquées en A et B et agissant en sens contraire. Supposons que F soit la plus grande. On peut remplacer la force F par

deux autres forces parallèles et de même sens, l'une F'_1 appliquée en B et égale à F', l'autre $R = F - F'$ appliquée en un point C tel que l'on ait

$$\frac{CA}{AB} = \frac{F'}{F - F'}, \qquad (1)$$

en appliquant les résultats du problème qui précède (nº 42).

Or, les deux forces F' et F'_1 appliquées au point C se

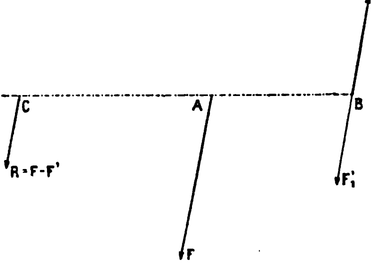


Fig. 23.

font équilibre, il ne reste donc plus que la force R qui est ainsi la résultante du système.

De la proportion (1) on tire

$$\frac{CA}{CA + AB} = \frac{F'}{F}$$

ou

$$\frac{CA}{CB} = \frac{F'}{F}.$$

Donc, deux forces parallèles et de sens contraires ont une résultante égale à leur différence. Cette résultante leur est parallèle, agit dans le sens de la plus grande des deux forces et rencontre la ligne qui joint leurs points d'application en un point, non situé entre

ces deux points, dont les distances à ceux-ci sont inversement proportionnelles aux intensités des deux forces proposées.

Remarque. — En écrivant la proportion qui précède sous la forme :

$$\frac{F}{CB}=\frac{F'}{CA}$$

on en tire

$$\frac{F}{CB}=\frac{F'}{CA}=\frac{F-F'}{CB-CA}=\frac{R}{AB}$$

on a donc encore ici

$$\frac{F}{CB}=\frac{F'}{CA}=\frac{R}{AB},$$

R étant la résultante des forces F et F'. On voit qu'ici encore *chacune des forces est proportionnelle à la distance des points d'application des deux autres.*

44. *Forces parallèles, égales et de sens contraires.* — Deux forces parallèles, égales et de sens contraires, non directement opposées, forment un système appelé *couple.*

45. *Théorème.* — *Un couple n'a pas de résultante.* Pour démontrer qu'un couple n'a pas de résultante, il suffit de prouver qu'il n'a pas d'équilibrante, car, s'il avait une équilibrante, il aurait une résultante égale et de sens contraire.

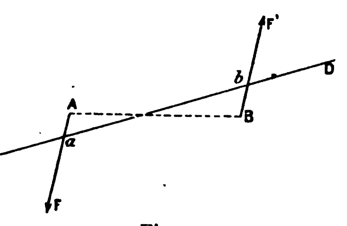


Fig. 24.

Soit un couple (fig. 24) formé de deux forces F, F' égales et de sens contraires. Supposons qu'il existe

une équilibrante; nous allons montrer qu'elle devrait être dans le plan des deux forces. En effet, considérons une droite quelconque D dans le plan des deux forces. Puisque le corps est en équilibre sous l'action des forces F, F′ et de l'équilibrante E, on ne change pas son état d'équilibre en fixant la droite D; mais les deux forces F, F′ rencontrant la droite D sont détruites par la résistance de la droite D qui est fixe. Il reste l'équilibrante E qui tend à faire tourner le corps autour de l'axe D. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que l'équilibrante rencontre la droite D (nos **30** et **31**) ou lui soit parallèle. Mais, comme on a pris D quelconque dans le plan des deux forces, ceci ne peut avoir lieu que si l'équilibrante E des deux forces F, F′ est dans le plan de ces deux forces.

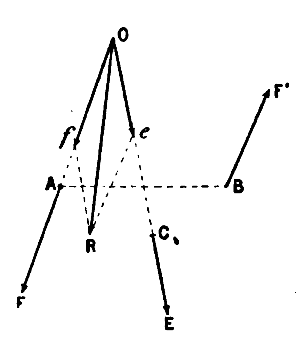


Fig. 25.

Deux cas peuvent alors se présenter : ou bien l'équilibrante, qui est dans le plan des deux forces, ne leur est pas parallèle, ou bien l'équilibrante leur est parallèle.

1° Si l'équilibrante E située dans le plan de deux forces F, F′, ne leur est pas parallèle (fig. 25), les forces E et F se rencontrent en un point O. Transportons-les au point O et composons-les : nous obtenons une résultante OR. Le corps soumis au deux forces OR, BF′ devrait être en équilibre, ce qui est impossible puisque OR étant inclinée sur AF ne peut être directement opposée à BF′.

2° Si l'équilibrante E située dans le plan des deux

forces F, F′ est parallèle aux deux forces (fig. 26), supposons-la de même sens que la force F. Les forces F et E parallèles et de même sens ont une résultante $R = F + E$ (n° 41). Le corps soumis aux deux forces DR et BF′ ne peut être en équilibre, car, puisque

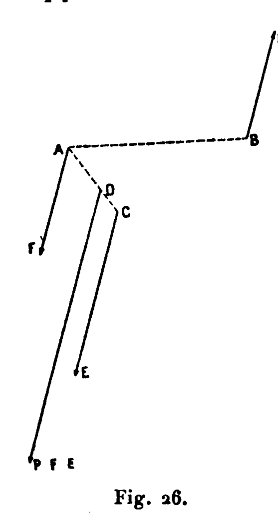


Fig. 26.

$$R = F + E,$$

on a :

$$R > F$$

et, comme

$$F = F',$$

on a aussi

$$R > F'.$$

Les deux forces R et F′ d'intensités différentes ne peuvent pas se faire équilibre.

Donc, dans aucun cas, un couple ne peut avoir d'équilibrante, et, par suite, de résultante.

46. ***Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles.*** — Pour avoir la résultante de forces parallèles entre elles dont les unes agissent dans un sens et les autres dans le sens opposé, on compose d'abord toutes celles qui agissent dans le même sens. Pour composer plusieurs forces parallèles F_1, F_2, F_3, F_4,... de même sens, appliquées à des points différents d'un corps solide, on commence par composer d'eux d'entre elles, F_1 et F_2 par exemple ; on obtient ainsi une première résultante R_1, d'intensité

$$R_1 = F_1 + F_2.$$

On compose ensuite cette résultante R_1 avec une troisième force F_3, ce qui donne une seconde résultante R_2 d'intensité

$$R_2 = R_1 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3.$$

On la compose avec la quatrième force F_4, et l'intensité de la troisième résultante R_3 obtenue est

$$R_3 = R_2 + F_4 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4,$$

et ainsi de suite.

La dernière résultante trouvée R est celle du système des forces agissant dans le même sens : elle est parallèle aux composantes et égale à leur somme. Elle agit d'ailleurs dans le même sens que les forces proposées.

On compose de la même façon toutes les forces qui agissent en sens contraire ; elles ont une résultante R′ qui leur est parallèle, de même sens et est égale à leur somme.

On obtient ainsi deux résultantes R et R′ parallèles entre elles et de sens opposés. Trois cas peuvent alors se présenter :

1° Les deux résultantes R et R′ ont des intensités différentes, elles ont alors une résultante unique dirigée dans le sens de la plus grande et dont l'intensité est la différence des intensités des deux forces R et R′ (n° **43**) ;

2° Les deux résultantes R et R′ sont égales et non directement opposées, elles constituent un couple et le système des forces données n'a pas de résultante (n° **45**) ;

3° Les deux résultantes R et R′ sont égales et directement opposées, le système est alors en équilibre.

Donc, étant donné un nombre quelconque de forces parallèles appliquées à un corps solide, elles peuvent se réduire soit à une résultante unique qui leur est parallèle, soit à un couple, soit enfin, se faire équilibre.

CHAPITRE II

MOMENTS

§ 1. — MOMENTS PAR RAPPORT A UN POINT

47. ***Définition.*** — On appelle *moment* d'une force par rapport à un point le produit de l'intensité de cette force par la longueur de la perpendiculaire abaissée du point sur sa ligne d'action.

Ainsi étant données la force AF et le point O, abaissons la perpendiculaire OH sur AF : le moment de la force F par rapport au point O (fig. 27) est le produit F × OH.

Fig. 27.

48. ***Notation.*** — On désigne le moment d'une force F par rapport à un point O par la notation $\mathcal{M}_0 F$.

Ainsi on écrit pour l'exemple précédent

$$\mathcal{M}_0 F = F \times OH.$$

49. ***Unité.*** — Si l'unité de force est le kilogramme et l'unité de longueur le mètre, l'unité de moment est le *kilogrammomètre*.

50. ***Signe d'un moment.*** — Lorsqu'on prend les moments de plusieurs forces *situées dans un même plan*, par rapport à un même point du plan, on affecte ces moments d'un signe.

Étant données des forces situées dans un plan et un point O dans ce plan (fig. 28), on convient de considérer comme positifs les moments des forces qui tendent à faire tourner le corps dans un certain sens (d'ailleurs arbitraire) autour du point O et comme négatifs les moments des forces qui tendent à faire tourner dans le sens contraire.

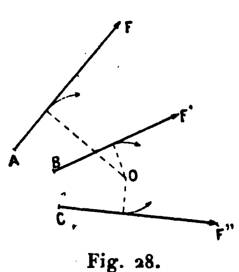


Fig. 28.

Ainsi sur la figure 28, si les moments de F et F′ sont positifs, celui de F″ est négatif.

51. Remarque. — Le moment d'une force par rapport à un point n'est *nul* que dans deux circonstances. En effet ce moment est donné par le produit (fig. 27) F. OH.

Ce produit ne sera nul que si la force F est nulle, ou si la perpendiculaire OH abaissée du point sur la force est nulle.

Donc, *le moment d'une force par rapport à un point n'est nul que si l'intensité de la force est nulle ou si la direction de la force passe par le point.*

52. ***Théorème de Varignon.*** — *Lorsque plusieurs forces, situées dans un même plan, ont une résultante unique, le moment de la résultante par rapport à un point quelconque du plan est égal à la somme algébrique des moments des différentes forces.*

53. Cas de deux forces concourantes — Soient (fig. 29) F, F′ deux forces appliquées en un point A, et R leur résultante. Prenons un point O dans le plan

des forces ; nous allons prouver que l'on a :

$$\mathfrak{M}_0 R = \mathfrak{M}_0 F + \mathfrak{M}_0 F'. \qquad (1)$$

A cet effet, faisons d'abord la remarque suivante :

Etant donnée une force AF (fig. 27) et un point O, *si on suppose que l'échelle des forces est la même que celle des longueurs*, le moment de la force F par rapport au point O est le double de la surface du triangle AOF.

En effet, on a

$$\mathfrak{M}_0 F = AF \times OH = 2 \text{ surf. } AOF.$$

Ceci posé, nous distinguerons plusieurs cas suivant la position du point O dans le plan.

1° Supposons d'abord que O ne soit pas situé (fig. 29) dans l'angle FAF' ni dans son opposé par le sommet. Dans ce cas, les forces tendent à faire tourner le corps dans le même sens autour de O et nous pouvons prendre ce sens pour sens positif.

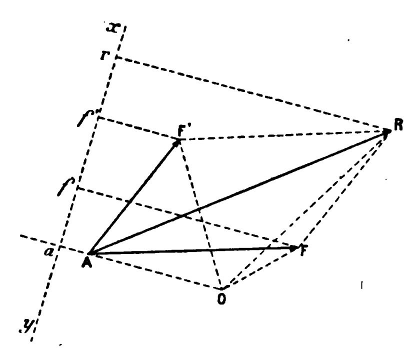


Fig. 29.

On a, alors

$$\mathfrak{M}_0 R = + 2 \text{ surf. } AOR,$$
$$\mathfrak{M}_0 F = + 2 \text{ surf. } AOF,$$
$$\mathfrak{M}_0 F' = + 2 \text{ surf. } AOF',$$

et la relation (1) peut s'écrire

$$2 \text{ surf. } AOR = 2 \text{ surf. } AOF + 2 \text{ surf. } AOF'. \qquad (2)$$

Les trois triangles AOR, AOF, AOF′ peuvent être regardés comme ayant pour base commune AO et pour sommets les points R, F, F′ et l'on obtiendra leurs hauteurs ar, af, af' en projetant sur un axe xy perpendiculaire à la base OA les points R, F, F′.

La relation (2) peut s'écrire

$$OA \times ar = OA \times af + OA \times af'$$

et, en divisant le tout par OA,

$$ar = af + af'. \tag{3}$$

Mais la figure donne, puisque les droites fr et af' sont égales comme projections sur un même axe de deux droites FR, AF′ égales et parallèles,

$$af + af' = af + fr = ar.$$

La relation (3) est donc démontrée et par conséquent la relation (1) équivalente.

2° Prenons maintenant le point O dans l'intérieur

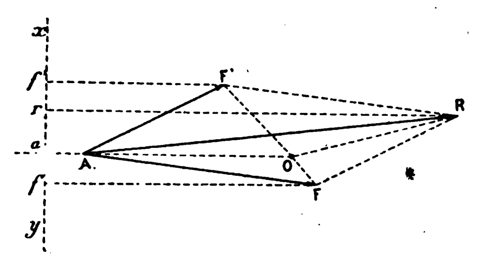


Fig. 30.

de l'angle FAF′ (fig. 30) et répétons la même construction que pour le cas qui précède.

Les deux forces R, F′ tendent à faire tourner le corps dans un sens, et la force F dans le sens contraire, autour du point O. Si on considère les moments

des forces R et F′ comme positifs, le moment de F sera négatif et on aura :

$$\mathfrak{M}_0 R = +\ 2 \text{ surf. } AOR,$$
$$\mathfrak{M}_0 F = -\ 2 \text{ surf. } AOF,$$
$$\mathfrak{M}_0 F' = +\ 2 \text{ surf. } AOF'.$$

La relation (1) peut s'écrire, dans ce cas,

$$2 \text{ surf. } AOR = 2 \text{ surf. } AOF' - 2 \text{ surf. } AOF. \qquad (4)$$

Les trois triangles AOR, AOF′, AOF ayant pour base commune AO et pour hauteurs *ar*, *af′*, *af*, l'égalité (4) peut s'écrire :

$$AO \times ar = OA \times af' - OA \times af$$

ou

$$ar = af' - af. \qquad (5)$$

Mais la figure donne, puisque les droites *af* et *rf′* sont égales comme projections sur un même axe de deux droites AF, F′R égales et parallèles,

$$af' - af = af' - rf' = ar.$$

La relation (5) est donc démontrée et par conséquent la relation (1) équivalente.

On arriverait au même résultat si l'on prenait le point O dans l'intérieur de l'angle opposé par le sommet à l'angle FAF′.

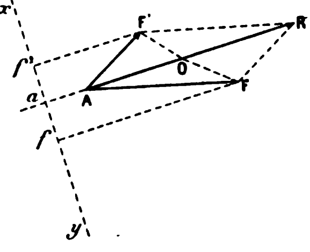


Fig. 31.

3° Considérons enfin le cas particulier où le point O est pris sur la direction de la résultante (fig. 31). Alors le moment de la résultante est égal à zéro et les moments des composantes

sont les doubles des surfaces des triangles AF′R et AFR.

Or, ces triangles sont équivalents comme ayant même base OA et des hauteurs égales puisque les droites *af*, *af′* sont égales comme projections sur *xy* de deux droites AF, RF′ égales et parallèles ; donc les deux moments sont égaux en valeur absolue et comme ils sont de signes contraires leur somme est égale à zéro, c'est-à-dire au moment de la résultante.

54. Cas de deux forces parallèles et de même sens. — Soient F, F′, deux forces parallèles, de même sens, appliquées aux points A et B et soit R leur résultante appliquée en C, (fig. 32).

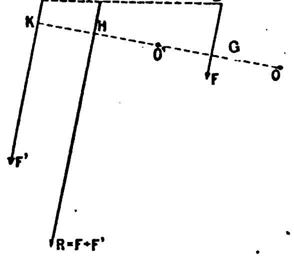


Fig. 32.

Prenons un point O dans le plan des forces.

Abaissons de ce point sur les directions des forces la perpendiculaire OK.

Entre les points K, H, G il y a la même relation qu'entre les points A, C, B, car on peut transporter les forces F′, R, F parallèlement à elles-mêmes, de manière que leurs points d'application soient K, H, G.

On a donc

$$\frac{HK}{HG} = \frac{F}{F'}. \qquad (1)$$

Il s'agit de démontrer la relation :

$$\mathfrak{M}_0 R = \mathfrak{M}_0 F + \mathfrak{M}_0 F'. \qquad (2)$$

1° Supposons d'abord que le point O (fig. 32) soit en

dehors des forces ; dans ce cas les forces tendent à faire tourner la figure dans le même sens autour du point O et on peut prendre ce sens comme positif : les trois moments sont donc positifs.

On a,

$$\mathfrak{M}_0 R = R \times OH = (F + F') \, OH,$$
$$\mathfrak{M}_0 F = F \times OG,$$
$$\mathfrak{M}_0 F' = F' \times OK.$$

Ces valeurs portées dans la relation (2) donnent

$$(F + F') \, OH = F \times OG + F' \times OK, \qquad (3)$$

égalité qu'il faut démontrer.

A cet effet, faisons passer les termes contenant F dans un membre et les termes contenant F′ dans l'autre, et nous obtenons :

$$F(OH - OG) = F'(OK - OH)$$

ou

$$F \times HG = F' \times KH. \qquad (4)$$

Mais cette relation (4) n'est autre que la relation (1) dans laquelle on a fait le produit des moyens et des extrêmes. Donc l'égalité (2) est démontrée.

2° Prenons maintenant un point O′ (fig. 32) situé entre les forces F et F′, entre R et F par exemple.

Dans ce cas, les forces F′ et R tendent à faire tourner la figure dans un sens et la force F dans le sens contraire, autour du point O′. Si on considère les moments des forces R et F′ comme positifs, le moment de F sera négatif et on aura :

$$\mathfrak{M}_{0'} R = + R \times O'H = (F + F') \, O'H,$$
$$\mathfrak{M}_{0'} F' = + F' \times O'K,$$
$$\mathfrak{M}_{0'} F = - F \times O'G.$$

Ces valeurs portées dans l'égalité (2) donnent

$$(F + F')\, O'H = F' \times O'K - F \times O'G,$$

ou :

$$F\,(O'H + O'G) = F'\,(O'K - O'H),$$

et enfin,

$$F \times HG = F' \times HK.$$

Ce qui n'est autre que la relation (1).

55. Cas de deux forces parallèles et de sens contraires. — Le théorème de Varignon est donc applicable aux forces parallèles et de même sens ; il est également applicable aux forces parallèles et de sens contraires.

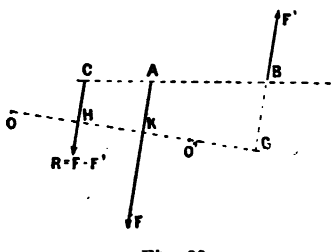


Fig. 33.

Soient, en effet, F, F' deux forces parallèles de sens contraires appliquées aux points A et B et soit R leur résultante appliquée en C (fig. 33).

Prenons un point O dans le plan des forces. Abaissons de ce point sur les directions des forces la perpendiculaire OK. Entre les points K, H, G, on a, encore la relation

$$\frac{HK}{GH} = \frac{F'}{F} \tag{1}$$

et il s'agit de prouver que :

$$\mathfrak{M}_0 R = \mathfrak{M}_0 F + \mathfrak{M}_0 F'. \tag{2}$$

1° Si nous supposons d'abord que le point O n'est pas entre les forces F et F', les forces F et R tendent à

faire tourner la figure dans un sens et la force F′ dans le sens contraire autour du point O. Si on considère les moments de F et de R comme positifs, celui de F′ sera négatif et on aura :

$$\mathfrak{M}_0 R = R \times OH = (F - F') OH,$$
$$\mathfrak{M}_0 F = F \times OK,$$
$$\mathfrak{M}_0 F' = - F' \times OG.$$

Ces valeurs portées dans (2) donnent

$$(F - F')\ OH = F \times OK - F' \times OG,$$

d'où

$$F (OK - OR) = F' (OH - OG),$$

et

$$F \times HK = F' \times HG.$$

Ce qui n'est autre que la relation (1).

2° Prenons maintenant un point O′ situé entre les forces F et F′.

Les forces F, F′ et R tendent (fig. 33) à faire tourner la figure dans le même sens autour de O′, on peut prendre ce sens comme positif et les trois moments sont positifs.

On a :

$$\mathfrak{M}_{0'} R = R \times O'H = (F - F')\ O'H,$$
$$\mathfrak{M}_{0'} F' = F \times O'K,$$
$$\mathfrak{M}_{0'} F' = F' \times O'G.$$

Ces valeurs portées dans (2) donnent

$$(F - F')\ O'H = F \times O'K + F' \times O'G,$$

ou

$$F\ (O'H - O'K) = F'\ (O'G + O'H),$$

et

$$F \times HK = F' \times HG.$$

Ce qui est encore l'égalité (1) et la relation (2) est démontrée.

56. Cas d'un nombre quelconque de forces situées dans un même plan. — Considérons un système de forces, en nombre quelconque, situées dans un même plan et admettant une résultante. Soient, par exemple, quatre forces F_1, F_2, F_3, F_4.

Pour trouver la résultante finale R on compose les forces deux à deux.

Nommons R_1, R_2, R les résultantes que l'on obtient successivement en composant F_1 et F_2, R_1 et F_3, R_2 et F_4. Soit O un point quelconque du plan des forces, nous aurons, en considérant les deux forces F_1, F_2 et leur résultante R_1,

$$\mathfrak{M}_0 R_1 = \mathfrak{M}_0 F_1 + \mathfrak{M}_0 F_2. \qquad (1)$$

En considérant R_1, F_3 et R_2 on a

$$\mathfrak{M}_0 R_2 = \mathfrak{M}_0 R_1 + \mathfrak{M}_0 F_3. \qquad (2)$$

En considérant R_2, F_4 et R on a

$$\mathfrak{M}_0 R = \mathfrak{M}_0 R_2 + \mathfrak{M}_0 F_4. \qquad (3)$$

Additionnant, membre à membre, ces égalités et supprimant ensuite les termes communs aux deux membres, il vient

$$\mathfrak{M}_0 R = \mathfrak{M}_0 F_1 + \mathfrak{M}_0 F_2 + \mathfrak{M}_0 F_3 + \mathfrak{M}_0 F_4.$$

Le théorème est ainsi démontré dans toute sa généralité.

Dans l'application de ce théorème très important il faut avoir soin de bien observer les signes des divers moments.

§ 2. — MOMENTS PAR RAPPORT A UN PLAN ET PAR RAPPORT A UN AXE.

57. ***Moment par rapport à un plan.*** — Étant donnés une force et un plan *parallèle à la force*, on appelle *moment de la force par rapport au plan* le produit de l'intensité de la force par sa distance au plan.

Comme la force est parallèle au plan, sa distance au plan est bien définie.

Ainsi soit (fig. 34), AF_1 une force parallèle au plan P, abaissons d'un point quelconque de la force une perpendiculaire KH sur le plan, le moment de la force par rapport au plan est

$$\mathfrak{M}_P F_1 = F_1 \times KH.$$

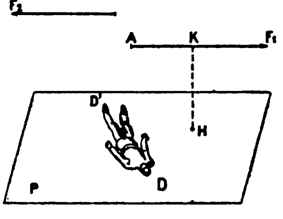


Fig. 34.

58. ***Signe du moment.*** — Considérons plusieurs forces parallèles et supposons que l'on prenne leurs moments par rapport à un plan qui leur est parallèle. Imaginons un observateur couché sur le plan suivant une direction *perpendiculaire* à celle des forces, soit D'D cette direction. L'observateur peut évoluer autour de l'axe D'D en regardant la force dont on doit prendre le moment.

Le moment sera *positif* si l'observateur regardant la force, la voit tourner de *gauche à droite* ; il sera *négatif* si elle tourne de *droite à gauche*.

Dans la figure 34, le moment de la force F_1 est positif, celui de la force F_2 est négatif.

Cette affectation d'un signe ne peut s'appliquer que si toutes les forces sont parallèles entre elles.

59. Théorème. — *Lorsque plusieurs forces parallèles ont une résultante, le moment de la résultante par rapport à un plan qui leur est parallèle est égal à la somme algébrique des moments des diverses forces.*

Pour démontrer cette proposition, nous ferons deux remarques préliminaires.

60. Remarque I. — Considérons (fig. 35) un plan P et une force F parallèle au plan ; menons un plan Q parallèle à la force F et perpendiculaire au plan P ; ce plan coupe le plan P suivant une droite xy et la force F est parallèle à xy. Projetons la force F sur le plan Q ; soit af cette projection qui est égale à AF.

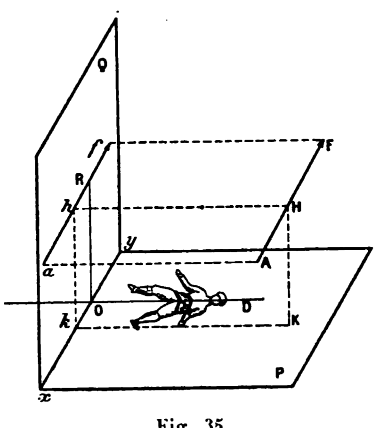


Fig. 35.

Abaissons d'un point quelconque de AF la perpendiculaire HK sur le plan P et projetons HK sur le plan Q, on aura

$$hk = \text{HK}.$$

Prenons sur xy un point O quelconque. Le moment de la force af par rapport au point O est égal au moment de la force AF par rapport au plan P, en grandeur et en signe :

$$\mathfrak{M}_0 f = \mathfrak{M}_P F. \qquad (1).$$

En effet, on a, en valeur absolue,

$$\mathfrak{M}_P F = F \times HK,$$
$$\mathfrak{M}_0 f = f \times OR.$$

Mais $$OR = hk = HK,$$

comme côtés opposés des rectangles ROhk et hkHK; et, comme $F = f$, les deux moments $\mathfrak{M}_0 f$ et $\mathfrak{M}_P F$ sont égaux en valeur absolue.

Ils sont aussi égaux en signes. En effet, considérons, une droite D passant par le point O, perpendiculaire au plan Q et supposons un observateur couché sur l'axe D et regardant la force F : il est debout sur le plan Q, ses pieds étant en O. Cet observateur voyant tourner les forces f et F dans le même sens les moments $\mathfrak{M}_0 f$ et $\mathfrak{M}_P F$ doivent être affectés du même signe. Donc la relation (1) est vraie en grandeur et en signe.

61. Remarque II. — *Si on considère deux forces parallèles et leur résultante et si on projette toute la figure sur un plan parallèle, on obtient encore deux forces parallèles et leur résultante.*

En effet, prenons (fig. 36) deux forces F et F′ parallèles et de même sens, appliquées en A et B et la résultante R appliquée en C. Soit Q un plan parallèle aux trois forces et projetons toute la figure sur le plan Q : r est la résultante des forces f et f'.

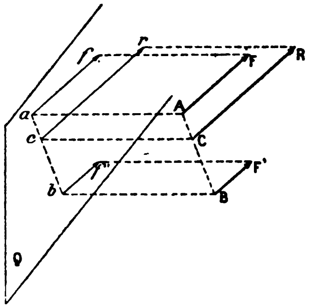


Fig. 36.

Les forces F, F′, R parallèles au plan Q s'y pro-

jettent suivant des forces égales et parallèles ; on a donc

$$r = R, \quad f = F, \quad f' = F'.$$

Et, comme

$$F + F' = R,$$

on a aussi

$$f + f' = r.$$

r est donc la résultante des forces f, f' en intensité et direction.

Démontrons que c projection de C est le point d'application de la résultante des forces f et f'

C étant le point d'application de la résultante R on a

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F'}{F};$$

et puisque $F = f$ et $F' = f'$, on peut écrire

$$\frac{AC}{BC} = \frac{f'}{f}. \qquad (1)$$

Or, les droites parallèles aA, cC, bB coupées par les deux droites AB, ab déterminent des segments proportionnels, et on a

$$\frac{AC}{BC} = \frac{ac}{bc}. \qquad (2)$$

Comparant les relations (1) et (2), on en tire

$$\frac{ac}{bc} = \frac{f'}{f}.$$

c est donc bien le point d'application de la résultante des deux forces f et f'.

Si on considère un nombre quelconque de forces

parallèles et leur résultante, et si on les projette sur un plan parallèle à toutes ces forces, la projection de la résultante peut être considérée comme la résultante des projections de toutes les forces.

En effet, l'énoncé, étant vrai pour deux forces, est vrai pour les deux premières forces et leur résultante R_1; il est vrai pour la troisième force, la résultante R_1 et leur résultante R_2 ; et ainsi de suite de proche en proche.

62. — Ces deux remarques faites, le théorème devient évident.

Considérons un nombre quelconque de forces parallèles, quatre par exemple, F_1, F_2, F_3, F_4 et leur résultante R et démontrons que le moment de la résultante par rapport à un plan P, parallèle aux forces, est égal à la somme algébrique des moments des diverses forces.

Menons un plan Q perpendiculaire au plan P et parallèle aux forces et projetons la figure sur le plan Q : les forces F_1, F_2, F_3, F_4 ont pour projections f_1, f_2, f_3, f_4 et la résultante R a pour projection la force r qui est la résultante des forces f_1, f_2, f_3, f_4 (n° **61**). Prenons un point O sur l'intersection xy des deux plans P et Q (fig. 35). On a (n° **60**)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_P F_1 &= \mathfrak{M}_0 f_1, \\ \mathfrak{M}_P F_2 &= \mathfrak{M}_0 f_2, \\ \mathfrak{M}_P F_3 &= \mathfrak{M}_0 f_3, \\ \mathfrak{M}_P F_4 &= \mathfrak{M}_0 f_4, \\ \mathfrak{M}_P R &= \mathfrak{M}_0 r. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Mais, d'après le théorème de Varignon (n° **52**), on a, entre les forces f_1, f_2, f_3, f_4 situées dans un plan,

leur résultante r et un point O du plan, la relation

$$\mathfrak{M}_0 r = \mathfrak{M}_0 f_1 + \mathfrak{M}_0 f_2 + \mathfrak{M}_0 f_3 + \mathfrak{M}_0 f_4.$$

En tenant compte des égalités (1), cette relation devient :

$$\mathfrak{M}_P R = \mathfrak{M}_P F_1 + \mathfrak{M}_P F_2 + \mathfrak{M}_P F_3 + \mathfrak{M}_P F_4.$$

Ce qui démontre le théorème, dans tous les cas, en grandeur et en signe.

63. ***Moment par rapport à un axe.*** — Etant donnée une force AF (fig. 37) et un axe xy, par un point quelconque O de xy menons un plan P perpendiculaire à cet axe et projetons la force AF en af sur le plan. Nous appellerons *moment de la force AF par rapport à l'axe xy* le moment, en grandeur et en signe, de la force af par rapport au point O. Nous écrirons donc :

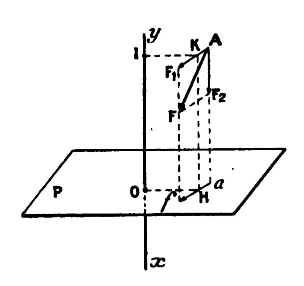


Fig. 37.

$$\mathfrak{M}_{xy} F = \mathfrak{M}_0 f.$$

64. Remarque. — Décomposons la force AF en deux : l'une AF_2 parallèle à l'axe xy ; l'autre AF_1 rectangulaire dans l'espace avec cet axe. La force AF_1 est égale à af. Le moment de la force AF par rapport à l'axe xy est alors égal au produit de l'intensité de AF_1 par sa plus courte distance IK à l'axe. Car IK est égale à la distance OH du point O à la force AF. On a donc :

$$\mathfrak{M}_{xy} F = \pm AF_1 \times IK,$$

avec un signe convenable suivant le sens dans lequel

la force tend à faire tourner le corps sur lequel elle agit autour de l'axe.

Le moment de la force F ne peut être nul que dans deux cas : ou bien si $AF_1 = o$, ce qui arrive lorsque la force est nulle ou parallèle à l'axe xy; ou bien si $IK = OH = o$, ce qui a lieu lorsque la ligne d'action de la force rencontre l'axe.

En résumé, *le moment d'une force par rapport à un axe est nul : soit lorsque cette force est nulle, soit lorsque sa ligne d'action rencontre l'axe ou lui est parallèle.*

On peut remarquer que les conditions où le moment est nul sont précisément celles où, l'axe xy étant fixe, le corps est en équilibre sous l'action de la seule force AF.

On peut donc dire que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps qui peut tourner autour d'un axe fixe et est soumis à une seule force soit en équilibre, est que le moment de cette force par rapport à cet axe soit nul.

CHAPITRE III

COUPLES

§ 1. — Propriétés générales des couples

65. ***Définitions.*** — Un *couple* est un système de deux forces égales, parallèles, de sens contraires et non directement opposées (n° **44**).

Un couple n'a pas de résultante, comme nous l'avons démontré plus haut (n° **45**).

On appelle *bras de levier* d'un couple la distance des deux forces qui constituent le couple; ainsi (fig. 38) la plus courte distance des deux forces F, — F étant HH′, HH′ est le bras de levier du couple.

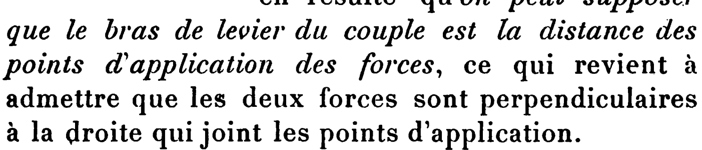


Fig. 38.

On peut supposer, sans changer l'état du corps, qu'on a transporté les forces F, — F en H et H′ puisqu'on peut déplacer le point d'application d'une force en un point quelconque de sa direction, il en résulte qu'*on peut supposer que le bras de levier du couple est la distance des points d'application des forces*, ce qui revient à admettre que les deux forces sont perpendiculaires à la droite qui joint les points d'application.

66. ***Moment.*** — On appelle *moment* d'un couple le produit de l'intensité commune des deux forces qui

constituent le couple par la mesure de la longueur du bras de levier.

Ainsi le couple F, — F (fig. 38) a pour moment $F \times HH'$; on écrit

$$\mathfrak{M}(\pm F) = F \times HH'.$$

Lorsque l'on a plusieurs couples *situés dans un même plan*, on affecte leurs moments d'un signe. Si on imagine un observateur placé entre les deux forces, par exemple au point O milieu de AB, debout sur le plan du couple, il voit tourner les deux forces dans le même sens ; un couple a donc un sens de rotation autour du point O. On dira, par exemple, que le moment est positif pour un couple tournant de gauche à droite et qu'il est négatif pou un couple qui tourne en sens contraire.

67. ***Théorème I.*** — *On peut, sans changer l'effet d'un couple sur un corps solide, transporter ce couple parallèlement à lui-même.*

En effet, soit un couple (F, — F) (fig. 39) agissant sur un corps solide en A et A' : prenons, dans ce corps, une droite BB' égale et parallèle à la droite AA' et démontrons que l'on peut transporter le couple (F, — F) parallèlement à lui-même de manière que les nouveaux points d'application des forces soient B et B'.

Au point B, appliquons deux forces F_1 et F_1' égales, de sens contraires, parallèles à F et de même intensité que F.

De même au point B', appliquons deux forces $-F_1$ — F_1', égales, de sens contraires, parallèles à — F et de même intensité que — F. L'introduction de ces quatre forces n'a pas changé l'état du système.

Or la figure AA' BB' est un parallélogramme, les

côtés opposés AA′ et BB′ étant égaux et parallèles; les diagonales AB′ et BA′ se coupent donc en leur milieu O.

Les deux forces — F_1', et F égales, parallèles et de même sens ont une résultante R égale à leur somme 2 F et appliquée au point O milieu de AB′. Les deux forces F_1' et — F égales, parallèles et de même sens ont aussi une résultante — R égale à leur somme 2F et appliquée en O milieu de BA′.

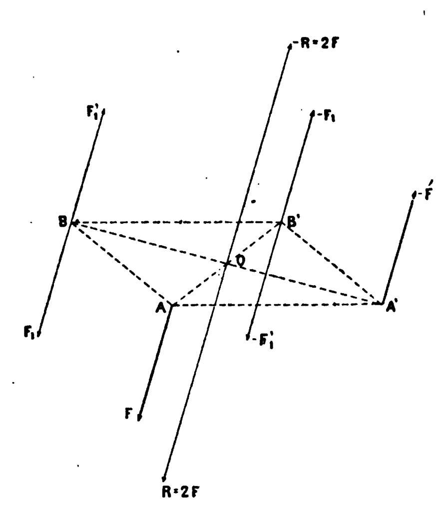


Fig. 39.

Ces deux forces R et — R, égales et directement opposées, se font équilibre et il ne reste que le couple (F_1, — F_1). Mais ce couple n'est autre que le couple donné (F, — F) transporté parallèlement à lui-même de manière que la droite AA′ vienne coïncider avec la droite BB′.

Le théorème est donc démontré.

68. ***Théorème II.*** — *Sans changer l'effet d'un couple sur un corps solide, on peut le faire tourner dans son plan autour du milieu de la droite qui joint les points d'application.*

Supposons que la droite qui joint les points d'application soit le bras de levier (n° 65) et soit le couple (F, — F) (fig. 40) ayant pour bras de levier

AA′; soit O le milieu de AA′. Menons par O une droite quelconque et sur cette droite prenons deux longueurs OB et OB′ égales à OA.

Appliquons au point B, dans le plan du couple, deux forces égales, directement opposées, perpendiculaires à BB′ et de même intensité que F, soient F_1 et F'_1 ces deux forces; de même appliquons en B deux forces $-F_1$ et $-F'_1$, égales, directement opposées, perpendiculaires à BB′ et de même intensité que $-F$.

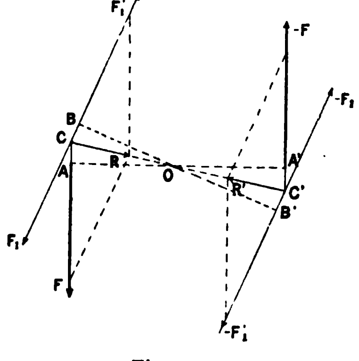


Fig. 40.

Les directions des forces F et F′, se coupent en C, celles de $-F'$, et $-F$ en C′. Joignons les points C et C′ au point O.

Les triangles CBO et COA rectangles en A et B sont égaux comme ayant l'hypoténuse OC commune et un côté de l'angle droit égal, $OA = OB$. Donc les deux angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOC}$ sont égaux et OC est bissectrice de l'angle $\widehat{BOA}$; de même, les deux angles $\widehat{BCO}$ et $\widehat{ACO}$ sont égaux et CO est bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$.

Pour les mêmes raisons OC′ est bissectrice des angles $\widehat{A'OB'}$ et $\widehat{A'C'B'}$.

Il en résulte que COC′ est une ligne droite, bissectrice de deux angles opposés par le sommet.

Transportons F et F'_1, en C, la résultante de ces

forces est dirigée suivant la bissectrice OC, soit CR cette résultante. De même, transportons — F et — F'_1, en C′ et soit C′R′ leur résultante. Les deux forces CR, C′R′ sont, par raison de symétrie, égales et directement opposées : elles se font équilibre. Il ne reste que le couple (F_1, — F_1). Ce couple n'est autre que le couple donné qu'on a fait tourner autour de O d'un certain angle.

69. *Conséquence.* — *On peut transporter un couple d'une manière quelconque pourvu que l'on ne change pas la direction de son plan ; c'est-à-dire, pourvu que son plan reste parallèle à lui-même.*

Considérons un couple (F, — F) (fig. 41) situé dans un plan P ; prenons un plan P′ parallèle au plan P, et, dans ce plan P′, une droite A′ B′ égale à AB et placée arbitrairement. On peut transporter le couple (F, — F) dans le plan P′ de manière que le bras de levier devienne A′ B′.

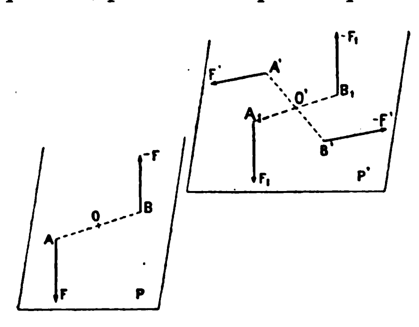


Fig. 41.

En effet, soit O le milieu de AB et soit O′ le milieu de A′B′ ; transportons le couple (F, — F) parallèlement à lui-même de manière que le point O vienne en O′, alors AB prend la position A_1 B_1 et le couple (F, — F) la position (F_1, — F_1) (n° **67**). Dans le plan P′, faisons ensuite tourner le couple (F_1, — F_1), de manière que le point A_1 vienne en A′ et B_1 en B′ ; le couple prendra la position (F′, — F′) (n° **68**).

Le plan P′ peut coïncider avec le plan P ; ce qui

montre que l'on peut déplacer un couple dans son propre plan.

70. ***Théorème III.*** — *On peut, sans changer l'effet d'un couple sur un corps solide faire varier le bras de levier du couple pourvu que l'on modifie les forces de manière que le moment ne change pas.*

En effet, soit un couple (F, — F) (fig. 42) et supposons que la droite AB qui joint les points d'application soit le bras de levier. Soit O le milieu de AB et prenons sur AB deux points A′ et B′ tels que le milieu de A′B′ soit le point O; démontrons que l'on peut remplacer le couple (F, — F) par un autre ayant pour bras de levier A′ B′ et même moment. Soit x l'intensité commune des forces de ce nouveau couple, on doit donc avoir

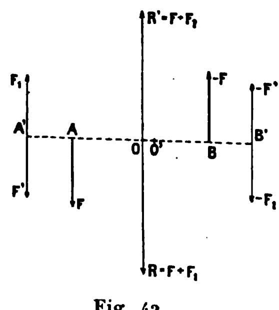


Fig. 42.

$$x \times A'B' = F \times AB$$

d'où on tire

$$x = F\,\frac{AB}{B'A'}. \qquad (1)$$

Appliquons au point A′ deux forces F′ et F_1 égales, directement opposées, perpendiculaires à A′B′ et dont l'intensité est x; de même au point B′ appliquons deux forces — F′ et — F_1 égales, directement opposées, perpendiculaires à A′B′ et ayant même intensité que les précédentes.

La relation (1) peut alors s'écrire

$$F' = F\frac{AB}{A'B'}$$

ou

$$\frac{F'}{F} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{\frac{AB}{2}}{\frac{A'B'}{2}} = \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}. \qquad (2)$$

Ceci posé, considérons les deux forces F et — F_1 parallèles et de même sens : elles ont une résultante égale à leur somme et appliquée au point O.

En effet, le point d'application de la résultante est un point O', tel que l'on ait :

$$\frac{O'A}{O'B'} = \frac{F_1}{F} = \frac{F'}{F} \quad (\text{car } F_1 = F'). \qquad (3)$$

Comparant les relations (2) et (3), on en tire

$$\frac{O'A}{O'B'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OA}{OB'} \quad (\text{car } OA = OB).$$

Les deux points O' et O partageant tous deux la droite AB' dans un même rapport et étant tous deux entre A et B', coïncident. Donc les deux forces F et — F_1, ont une résultante dont le point d'application est en O et d'intensité $R = F + F_1$.

De même les deux forces — F et F_1 ont une résultante R' égale à leur somme et appliquée en O.

Les deux forces R et R', égales et directement opposées, peuvent être supprimées sans changer l'état du corps et il reste le couple (F', — F') qui a même moment que le couple donné.

Le théorème est donc démontré.

71. *Résumé*. — En combinant les résultats énoncés dans les nos 69 et 70, on en conclut que :

On peut sans changer l'effet d'un couple sur un corps solide transporter le couple d'une manière quelconque et le déformer pourvu qu'on ne fasse pas varier les trois quantités suivantes :

1° *La direction de son plan ;*

2° *Le sens de rotation du couple ;*

3° *Le moment.*

72*. *Axe d'un couple.* — Ceci a conduit à représenter un couple sous une forme géométrique simple. Par le milieu de son bras de levier on élève une perpendiculaire au plan du couple, sur cette perpendiculaire, on prend une longueur OA proportionnelle au moment du couple et dirigée de façon qu'un observateur, ayant les pieds en O et la tête en A, voie tourner le couple de gauche à droite. C'est ce segment OA, caractéristique du couple, qu'on appelle l'*axe du couple* (fig. 43).

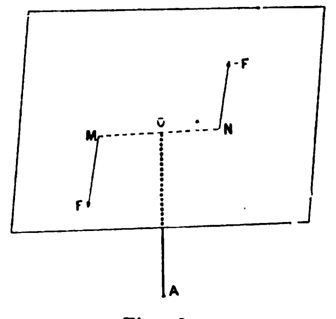


Fig. 43.

On peut donc représenter un couple en grandeur et en direction par un seul segment, tout comme une simple force.

L'axe d'un couple ne change pas quand on fait sur un couple toutes les modifications permises puisque la direction du plan reste la même. Seule l'origine de l'axe peut changer.

Réciproquement, quand on connaît l'axe du couple, on connaît les trois éléments invariables de ce couple. Donc un couple est représenté sans ambiguïté par son axe, l'origine de l'axe restant arbitraire.

Ainsi le segment OA représente en grandeur et en sens, un couple situé dans le plan perpendiculaire en O à OA et ayant un moment exprimé par le même nombre que la mesure de OA.

73. Théorème. — *Le moment d'un couple est égal à la somme algébrique des moments des deux forces qui constituent ce couple par rapport à un point quelconque du plan du couple.*

Soit un couple $(F, -F)$ supposé situé dans le plan du tableau et soit (fig. 44) AB son bras de levier. Le moment de ce couple est

$$\mathfrak{M}(\pm F) = \pm AB \times F,$$

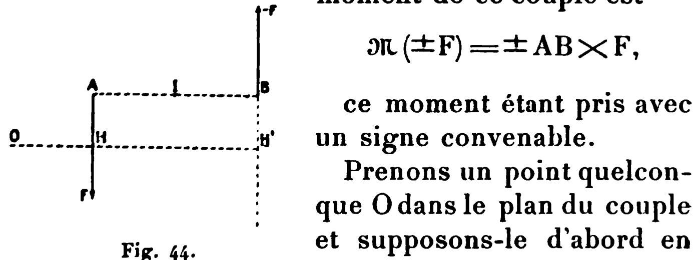


Fig. 44.

ce moment étant pris avec un signe convenable.

Prenons un point quelconque O dans le plan du couple et supposons-le d'abord en dehors des forces, menons OH' perpendiculaire à la direction des forces du couple, on a

$$\mathfrak{M}_0 F = + F \times OH,$$
$$\mathfrak{M}_0 (-F) = - F \times OH'.$$

Ajoutant ces égalités membres à membres on a

$$\mathfrak{M}_0 F + \mathfrak{M}_0 (-F) = - F (OH' - OH)$$
$$\mathfrak{M}_0 F + \mathfrak{M}_0 (-F) = - F \times HH'.$$

Mais $- F \times HH'$ est le moment du couple, on a donc

$$\mathfrak{M}_0 F + \mathfrak{M}_0 (-F) = \mathfrak{M} (\pm F),$$

ce qui démontre le théorème.

Si l'on prenait le point O entre les deux forces du couple, on arriverait au même résultat.

REMARQUE. — En rapprochant ce théorème du théorème de Varignon, on arrive à la conclusion suivante :

Lorsqu'un système de forces situées dans un même plan est équivalent à un couple unique, la somme algébrique des moments des forces par rapport à un point quelconque du plan est constante et égale au moment du couple.

§ 2. — COMPOSITION DES COUPLES

74. *Composition de deux couples situés dans le même plan ou dans des plans parallèles.* — 1° *Les deux couples ont même sens de rotation.*

Soient deux couples, l'un (F,—F) situé dans un plan P et ayant pour bras de levier AB, l'autre (F′, — F′) situé dans un plan P′ parallèle au plan P et ayant pour bras de levier A′B′ (fig. 45).

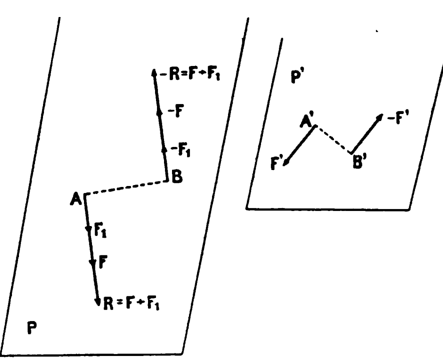


Fig. 45.

On peut faire varier le bras de levier A′B′ du couple (F′, — F′) de manière qu'il ait même longueur que le bras de levier du couple (F,—F) (n° 70); puis on peut transporter ce nouveau couple dans le plan P (n° 69), de manière que les bras de levier des deux couples coïncident. Aux extrémités du bras de levier AB sont alors appliquées quatre forces. Les deux forces F et F_1 appli-

quées en A ayant même ligne d'action et étant dirigées dans le même sens se composent en une force AR égale à leur somme $F + F_1$; de même les deux forces $-F$ et $-F_1$ appliquées en B se composent en une force $-R$ égale à $F + F_1$.

Le deux forces R et $-R$, égales, parallèles, de sens contraires et non directement opposées constituent un couple qui est le couple résultant.

Évaluons le moment de ce couple résultant $(R, -R)$. On a

$$R \times AB = (F + F_1)\ AB = F \times AB + F_1 \times AB$$

Donc

$$\mathfrak{M}(\pm R) = \mathfrak{M}(\pm F) + \mathfrak{M}(\pm F').$$

Le moment du couple résultant est la somme des moments des couples composants.

2° *Les deux couples ont des sens de rotation contraires.*

Faisons sur les deux couples les mêmes opérations que dans le cas précédent de façon qu'ils aient même bras de levier AB.

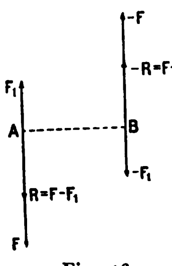


Fig. 46.

Les deux forces F et F_1, de sens contraires, appliquées au point A (fig. 46) ont une résultante R égale à leur différence $F - F_1$ et dirigée dans le sens de la plus grande. De même, les deux forces $-F$ et $-F_1$ appliquées au point B ont une résultante $-R$ égale à $F - F_1$ et les deux couples sont encore remplacés par un seul couple $(R, -R)$ qui est le couple résultant.

Évaluons aussi le moment du couple résultant: on a

$$R \times AB = (F - F_1)\ AB = F \times AB - F_1 \times AB$$

ce qui s'écrit

$$\mathfrak{M}(\pm R) = \mathfrak{M}(\pm F) + \mathfrak{M}(\pm F'),$$

car si le moment du couple F_1, — F est positif, celui de l'autre couple est négatif.

75. Donc, dans tous les cas :

Étant donnés deux couples situés dans un même plan ou dans des plans parallèles, on peut les remplacer par un autre couple situé dans ce plan ou dans un plan parallèle et dont le moment est égal à la somme algébrique des moments des deux couples.

Remarque. — Si, dans le second cas, les forces (fig. 46) F et F_1 sont égales et de sens contraire, il y a équilibre et le couple résultant est nul.

Donc *si les moments des deux couples sont égaux et de signes contraires, le moment résultant est nul et les deux couples se font équilibre.*

76. ***Composition de deux couples situés dans des plans non parallèles.*** — Soient deux couples, l'un (F, — F) situé dans un plan P et ayant pour bras de levier AB ; l'autre (F', — F') situé dans un plan P' non parallèle au plan P et ayant pour bras de levier A'B' (fig. 47). Les deux plans non parallèles se coupent suivant une droite *xy ;* prenons sur cette droite deux points M,N. Transportons le couple (F, — F) dans son plan jusqu'à ce que son bras de levier coïncide avec *xy* (n° **69**) et remplaçons-le par un couple (*f*, — *f*) dont le bras de levier est MN et ayant même moment (n° **70**).

De même, transportons le couple (F', — F') dans son plan jusqu'a ce que son bras de levier coïncide

avec xy et remplaçons-le par un couple $(f', -f')$ dont le bras de levier est MN.

Au point M on a ainsi deux forces concourantes f, f' qu'on compose d'après le parallélogramme des forces et qui donnent une résultante R; de même au point N, les deux forces concourantes $-f$ et $-f'$ donnent une résultante — R.

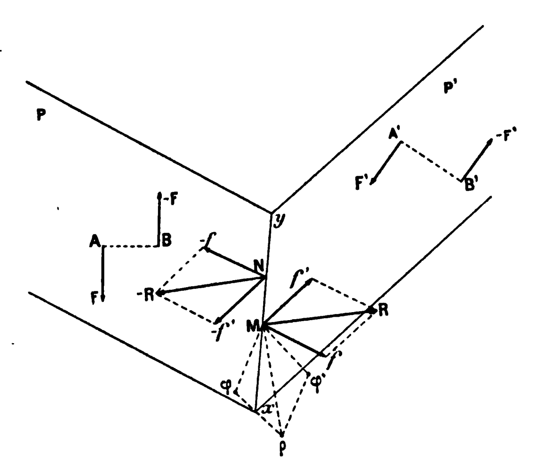


Fig. 47.

Les deux forces R et — R forment un couple ; en effet, les parallélogrammes $MfRf'$ et $N-f'-R-f$ sont symétriques par rapport au milieu de la droite MN, leurs diagonales sont donc aussi symétriques et forment un couple qui est dit *couple résultant.*

Donc *on peut remplacer deux couples agissant dans des plans différents par un seul couple.*

77. ***Composition d'un nombre quelconque de couples.*** — Soit un corps solide soumis à un nombre quelconque de couples, quatre par exemple, C_1, C_2, C_3, C_4.

Composons les deux couples C_1 et C_2 et soit R_1 le couple résultant ; puis composons R_1 et C_3, soit R_2 le couple résultant et enfin composons R_2 et C_4, soit R le couple résultant final.

Donc *étant donné un nombre quelconque de couples appliqués à un corps solide et distribués d'une façon arbitraire dans ce corps, on peut toujours les remplacer par un seul couple qu'on appelle le couple résultant.*

Il peut arriver que le couple résultant ait un moment nul et que, par conséquent, les deux forces qui constituent ce couple se fassent équilibre ; tous les couples proposés se font alors équilibre.

78. Remarque. — *Lorsque tous les couples sont dans un même plan, le couple résultant est situé dans ce plan et son moment est égal à la somme algébrique des moments de tous les couples donnés.*

En effet, soient quatre couples, C_1, C_2, C_3, C_4 situés dans un même plan. Nommons R_1, R_2, R les couples que l'on obtient successivement en composant C_1 et C_2, R_1 et C_3, R_2 et C_4. On a (n° **75**) :

$$\mathfrak{M}R_1 = \mathfrak{M}C_1 + \mathfrak{M}C_2,$$
$$\mathfrak{M}R_2 = \mathfrak{M}R_1 + \mathfrak{M}C_3,$$
$$\mathfrak{M}R = \mathfrak{M}R_2 + \mathfrak{M}C_4.$$

En additionnant membre à membre ces égalités et supprimant les termes communs, il vient

$$\mathfrak{M}R = \mathfrak{M}C_1 + \mathfrak{M}C_2 + \mathfrak{M}C_3 + \mathfrak{M}C_4.$$

79* ***Théorème.*** — *L'axe du couple résultant de plusieurs couples s'obtient en composant les axes de ces divers couples, placés de façon à avoir même origine, comme si ces axes étaient des forces.*

Prenons d'abord le cas de deux couples (fig. 47) et plaçons-les, comme plus haut, de façon à avoir même bras de levier MN. Nous pouvons toujours supposer que la longueur MN a pour mesure 1, puisque nous pouvons la prendre arbitrairement.

Prenons le point M pour origine commune des axes $M\varphi$, $M\varphi'$ et $M\rho$ des couples $(f, -f)$, $(f', -f')$ et du couple résultant $(R, -R)$.

Comme $MN = 1$, on a :

$$M\varphi = f, \quad M\varphi' = f' \quad \text{et} \quad M\rho = R.$$

De plus, comme chaque axe est perpendiculaire au plan du couple correspondant, on en conclut que $M\varphi$, $M\varphi'$ et $M\rho$ s'obtiennent en faisant tourner, respectivement, Mf, Mf' et MR autour de MN d'un angle droit dans le même sens. Comme la figure $MfRf'$ est un parallélogramme, la figure $M\varphi\rho\varphi'$ qu'on en déduit par une rotation d'un angle droit autour de MN est encore un parallélogramme. Ce qui prouve que $M\rho$ est la résultante de $M\varphi$ et $M\varphi'$.

Le théorème étant vrai pour deux couples, s'étend, sans difficulté, de proche en proche, à un nombre quelconque de couples.

CHAPITRE IV

RÉDUCTION D'UN SYSTÈME DE FORCES. — ÉQUILIBRE

§ I. — COMPOSITION DE TOUTES LES FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE

80. ***Théorème.*** — *Lorsqu'un corps solide est soumis à un nombre quelconque de forces, on peut remplacer toutes ces forces par une force unique et un couple.*

Pour établir ce théorème, démontrons d'abord le lemme suivant :

81. LEMME. — *Etant donnée une force appliquée à un corps solide et un point pris arbitrairement dans ce corps, on peut remplacer la force par une autre qui est appliquée en ce point, à condition d'ajouter un couple dont le moment est égal au moment de la force donnée par rapport au point.*

En effet, soit F la force et soit O le point pris arbitrairement dans le corps solide (fig. 48). En O appliquons deux forces F_1 et F_2 égales, directement opposées, parallèles à F et de même intensité que F ; l'état du système n'est pas changé. Mais la force F_1 n'est autre que la force F transportée parallèlement à elle-même en O, et les deux forces

Fig. 48.

F, F_2 forment un couple dont le moment est $F \times OH$, OH étant perpendiculaire à la direction des forces. Ce produit est bien le moment de F par rapport au point O.

Le lemme est donc démontré.

82. — Considérons maintenant un corps solide soumis à un certain nombre de forces distribuées d'une manière quelconque : soient par exemple les trois forces F_1, F_2, F_3 (fig. 49). Prenons un point quelconque O dans le corps solide ; transportons la force F_1 parallèlement en O en introduisant dans le corps un certain couple C_1 ; nous pouvons le faire en vertu du lemme précédent. De même transportons F_2 et F_3 parallèlement en O en introduisant des couples C_2 et C_3.

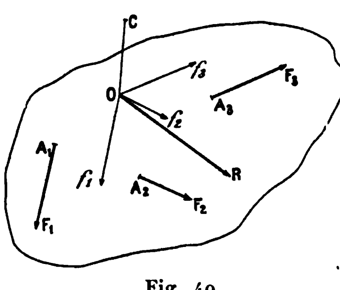


Fig. 49.

Le corps solide est alors soumis : 1° à des forces concourantes f_1, f_2, f_3, appliquées au point O qui ont une résultante unique R ou se font équilibre.

2° à des couples C_1, C_2, C_3, qui se composent (n° 77) en un seul couple C ou se font équilibre.

Le théorème est démontré, car on a remplacé toutes les forces par une force R qui est la *résultante générale*, et un couple C, qui est le *couple résultant relatif au point* O.

83. Remarque. — *Quelle que soit la position du point* O *dans le corps solide, la résultante générale est toujours la même en grandeur et en direction ;* en effet,

si au lieu du point O on prenait un autre point O′ on aurait des forces $O'f_1'$, $O'f_2'$, $O'f_3'$ respectivement égales et parallèles aux forces f_1, f_2, f_3 et la figure $O'f_1'f_2'f_3'$ serait la figure $Of_1f_2f_3$ transportée parallèlement à elle-même ; il en résulte que la résultante O′R′ se déduirait de la résultante OR par un transport parallèle et par conséquent que R′ serait égale et parallèle à R.

Mais *le couple résultant change quand le point* O *varie ;* en effet, le moment du couple résultant du transport d'une force est égal (lemme précédent) au moment de la force par rapport au point O ; il ne sera donc pas le même que le moment de la même force par rapport au point O′.

Donc, *si l'on change le point par rapport auquel on fait la réduction, la résultante générale ne change pas, en grandeur et en direction, le couple change seul.*

84. ***Théorème.*** — *La réduction d'un système de forces à un couple et à une résultante appliquée en un point* DONNÉ, *n'est possible que d'une seule manière.*

Soient S un système de forces et O un point donné. Supposons qu'on ait trouvé, d'une première façon, une résultante R appliquée en O et un couple C tels que le système formé par R et C, soit équivalent au système S. Admettons, ensuite, que, d'une seconde manière, on ait trouvé une résultante R′ appliquée au *même* point O et un couple C′ tels que le système formé par R′ et C′ soit également équivalent à S. Nous allons montrer que R est identique à R′ et le couple C équivalent à C′. En effet, les systèmes R, C, et R′, C′, étant équivalents au système S, sont équivalents entre eux. Soit, alors, — R une force égale et directement opposée à R et un couple — C formé de forces égales et directement opposées à celles qui

constituent le couple C. Le système — R, — C, faisant équilibre au système R, C, fera aussi équilibre au système équivalent R′, C′. Si les deux forces R′ et — R n'étaient pas égales et directement opposées elles auraient une résultante *r* ; de même si les deux couples — C et C′ ne se faisaient pas équilibre, ils se composeraient en un couple *c*. Le système *r*, *c*, devrait alors être en équilibre et ceci est impossible car une force *r* ne peut pas équilibrer un couple *c* (n° **45**).

Il faut donc que R′ soit égale et directement opposée à — R donc identique à R et que le couple C′ équilibre le couple — C, donc qu'il soit équivalent à C.

85. — Ce théorème peut s'énoncer ainsi :

Deux systèmes équivalents ont même résultante générale et même couple résultant en un point DONNÉ.

86. ***Théorème.*** — *Toutes les forces appliquées à un corps solide peuvent se réduire à deux, le point d'application de l'une des deux forces étant arbitraire.*

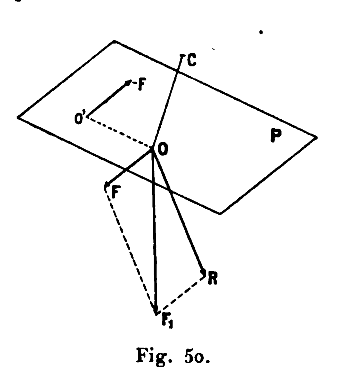


Fig. 5o.

En effet, considérons un corps solide et un point O pris au hasard dans ce corps (fig. 5o). Toutes les forces appliquées au corps peuvent se réduire à une force unique R et à un couple (n° **80**).

Figurons les deux forces (F, — F) qui constituent le couple et supposons l'une des forces F appliquée au point O, ce que nous avons le droit de faire puis-

qu'on peut transporter le couple. Les deux forces F et R concourantes peuvent se composer ; soit F_1 leur résultante. Le système se réduit donc à deux forces F_1 et $-F$, le point d'application de F_1 étant choisi arbitrairement.

87. ***Condition pour qu'un système de forces ait une résultante unique.*** — Supposons qu'un système de forces S admette une résultante unique AR. Prenons un point O dans le corps solide ; d'après le théorème du n° **85**, on peut, pour faire la réduction du système S au point O, le remplacer par la force équivalente AR et, par suite, transporter cette force parallèlement à elle-même au point O en OR′ à condition d'ajouter un couple (R, — R) (fig. 51).

On obtient ainsi une résultante R′ et un couple (R, — R) et la force R′ est dans le plan du couple, ou parallèle au plan du couple. Cette condition est donc nécessaire.

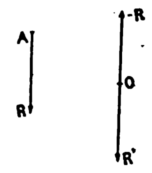


Fig. 51.

Elle est suffisante ; en d'autres termes, si toutes les forces appliquées au corps solide se réduisent à une résultante OR et à un couple et si le plan du couple est parallèle à la résultante, le système de forces admet une résultante unique. En effet, on peut supposer, en transportant le plan du couple parallèlement à lui-même, que ce plan contient la force R ; prenons-le pour plan du tableau. Menons par O une perpendiculaire Ox à OR (fig. 52), on peut toujours déplacer le couple dans son plan et faire en sorte que son bras de levier

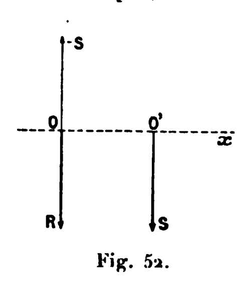


Fig. 52.

soit placé sur la droite Ox. On peut aussi supposer qu'une force du couple soit appliquée au point O et ait pour intensité OR ; pour cela on n'a qu'à choisir convenablement le bras de levier.

Ce bras de levier devra être égal à $\frac{M}{R}$, M étant le moment du couple.

On a alors une force R et un couple (S,-S) ; les deux forces S ayant même intensité que la force R. Les forces R et — S s'équilibrant comme forces égales et directement opposées, il ne reste que la force S. Il y a donc une résultante unique et la condition est suffisante.

Ceci suppose que la résultante n'est pas nulle.

88. ***Forces situées dans un même plan.*** — Lorsque les forces appliquées à un corps solide sont toutes situées dans un même plan, il peut se présenter trois cas :

1° *Les forces ont une résultante unique.*

2° *Les forces se réduisent à un couple, et il n'y a pas de résultante.*

3° *Les forces se font équilibre.*

En effet, soit un système de forces situées dans un même plan. En faisant la réduction de ces forces en un point O du corps solide, on obtient une résultante unique et un couple et, comme toutes les forces sont dans un même plan, le couple se trouve dans le même plan que la résultante.

1° Supposons que la résultante générale OR ne soit pas nulle. Alors les forces se réduisent à une résultante R et à un couple, la force R et le couple étant *dans le même plan ;* on peut donc remplacer ce système par une résultante unique (n° **87**).

2° Si la résultante générale est nulle, le système des forces se réduit à un couple qui est indépendant de la position du point O choisi pour faire la réduction puisqu'on a le droit de déplacer un couple dans son plan (n° 69).

3° Si la résultante générale et le couple sont nuls, le système est en équilibre.

§ 2. — ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE LIBRE

89. ***Corps solide libre.*** — Considérons un corps solide libre soumis à un nombre quelconque de forces. On peut réduire ces forces à une résultante unique et à un couple (n° **80**).

Il ne peut y avoir équilibre que si la résultante est nulle et si le moment du couple est nul.

En effet, si le corps solide était en équilibre avec une résultante non nulle et un couple non nul, la résultante devrait équilibrer le couple et par conséquent ce couple admettrait une équilibrante, ce qui est impossible (n° **45**).

Si la résultante était nulle et que le couple ne fût pas nul, le corps ne pourrait pas être en équilibre, car il serait soumis à deux forces égales, mais non directement opposées.

Enfin, si le couple était nul sans que la résultante le soit, le corps soumis à une seule force ne pourrait pas être en équilibre.

Donc le corps solide libre ne peut être en équilibre que si la résultante et le couple sont nuls séparément.

90. ***Cas de forces situées dans un même plan.*** — Considérons un corps solide libre soumis à un nom-

bre quelconque de forces *toutes situées dans un même plan.* On peut faire la réduction des forces en un point O du plan, la résultante générale s'obtiendra en transportant toutes les forces parallèlement à elles-mêmes au point O.

Pour qu'il y ait équilibre il faut d'abord que cette résultante soit nulle ; par conséquent le polygone des forces doit se fermer.

Chaque fois qu'on transporte une force parallèlement à elle-même au point O, il faut introduire un couple dont le moment est égal au moment de la force par rapport au point O (n° **81**). Donc le couple résultant qui est la résultante de tous ces couples a un moment égal à la somme algébrique des moments des couples composants (n° **78**) c'est-à-dire *à la somme algébrique des moments de toutes les forces considérées*, par rapport au point O.

Donc, *pour que le corps solide libre soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante générale soit nulle et que la somme algébrique des moments de toutes les forces par rapport à un point quelconque du plan soit nulle.*

91. ***Conditions analytiques d'équilibre de forces situées dans un même plan.*** — Considérons plusieurs forces F_1, F_2, F_3, ... appliquées à un corps solide libre et situées dans un même plan et soient deux axes rectangulaires Ox, Oy, tracés dans ce plan. Au point de vue analytique, les forces seront déterminées si l'on se donne les coordonnées de leurs points d'application et les composantes X_1, Y_1 ; X_2, Y_2 ; X_3, Y_3 ; .... de ces forces suivant Ox et Oy (fig. 53).

Faisons la réduction des forces au point O ; pour cela transportons les forces parallèlement à elles-

mêmes en O. Les forces X_1, X_2, X_3,... transportées en O sont toutes dirigées suivant Ox ; soit OX leur résultante, elle est égale à

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots$$

De même les forces Y_1, Y_2, Y_3 ... dirigées suivant Oy ont une résultante OY égale à :

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots$$

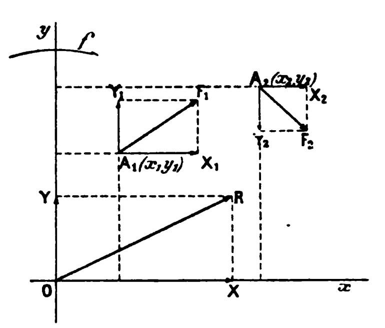


Fig. 53.

La résultante générale est la force OR obtenue en composant OX et OY.

Exprimons que la résultante générale est nulle. Pour cela il faut et il suffit que X et Y soient nuls.

Donc, les deux premières conditions d'équilibre sont :

$$X_1 + X_2 + X_3 + \ldots = 0, \qquad (1)$$
$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots = 0. \qquad (2)$$

Il faut en outre que la somme des moments des forces par rapport au point O soit nulle.

Le moment de X_1 est en grandeur et en signe

$$\mathfrak{M}_0 X_1 = X_1 y_1.$$

Le moment de Y_1 est

$$\mathfrak{M}_0 Y_1 = - Y_1 x_1.$$

De même, on a

$$\mathfrak{M}_0 X_2 = X_2 y_2,$$
$$\mathfrak{M}_0 Y_2 = - Y_2 x_2.$$

Et on a, comme troisième condition,

$$X_1 y_1 - Y_1 x_1 + X_2 y_2 - Y_2 x_2 + \ldots\ldots = o. \qquad (3)$$

On peut écrire ces conditions sous la forme abrégée suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum X_1 = o, \\ \sum Y_1 = o, \\ \sum (Y_1 x_1 - X_1 y_1) = o. \end{array}\right.$$

Ce sont là les trois conditions analytiques d'équilibre d'un corps solide libre soumis à des forces situées dans un même plan.

§ 3. — Équilibre d'un corps solide gêné

92. ***Liaisons.*** — On dit qu'un corps solide est gêné lorsque certains points de ce corps sont soumis à des liaisons avec d'autres corps solides.

Voici des exemples de liaisons fréquentes.

Un corps peut avoir *un* point fixe.

Il peut avoir *deux* points fixes A et B, mais alors tous les points de la droite AB sont fixes, et on peut dire que le corps a, dans ce cas, *un axe fixe* autour duquel il peut tourner librement.

Enfin le corps peut *reposer sur un plan;* il se trouve en contact par certains points avec lui. Les points du corps en contact avec le plan sont assujettis à rester dans ce plan à condition que le corps soit pressé contre lui et qu'on ne le soumette pas à une action qui puisse l'en écarter.

93. *Réactions.* — Lorsqu'un corps est soumis à certaines liaisons et qu'il est en équilibre, si on supprime ces liaisons, l'équilibre, en général, est détruit.

On se rend facilement compte qu'on peut le faire subsister en supprimant les liaisons, mais en faisant agir sur le corps, aux divers points où il est gêné, certaines forces convenables.

On appelle *réactions*, dans un corps solide gêné, les forces qu'il faudrait appliquer aux points où il est gêné pour qu'il reste en équilibre si l'on supprimait les liaisons.

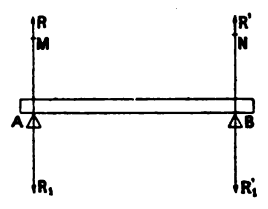


Fig. 54.

Ainsi, soit une poutre horizontale (fig. 54) reposant sur les deux appuis A et B. Si l'on supprimait les deux appuis la poutre tomberait ; mais si, en les supprimant, nous appliquions deux forces convenables R et R' en A et B nous pourrions empêcher la poutre de tomber, par exemple en la soutenant par des cordes verticales fixées en A et B. Les tensions des cordes AM, BN sont les *réactions* des deux appuis sur la poutre AB.

94. *Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.* — Ce principe est expérimental et s'énonce comme il suit :

Lorsque deux corps sont en contact par un point et que le premier agit sur le second, celui-ci réagit sur le premier avec une force égale et de sens contraire à l'action du premier sur lui.

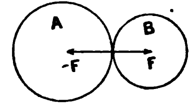


Fig. 55.

Ainsi, soient deux corps A et B (fig. 55) en contact par un point. Le corps A agit sur le corps B et produit une action représentée par une force F ; le corps B à son tour réagit sur le corps A et produit une réaction représentée par une force (— F) égale et opposée à la force F.

Il résulte de là que lorsqu'un corps solide est gêné,

il agit, en tous les points où il est gêné, sur les corps solides avec lesquels il est en contact, avec des forces égales et directement opposées aux réactions de ces corps solides sur lui.

Ces actions du corps solide sur ceux qu'il touche sont ce qu'on appelle les *charges* du corps solide sur ses appuis.

Ainsi, dans le cas précédent d'une poutre horizontale reposant sur deux appuis A et B (fig. 54) les réactions sont R et R' ; réciproquement, la poutre agit sur les appuis A et B et produit des forces R_1 et R'_1 égales et directement opposées aux forces R et R'. Ces forces R_1 et R_1' sont les *charges aux appuis*.

95. *Glissement sans frottement.* — Lorsqu'un corps a un point *fixe* ce point résiste à toutes les forces et, par suite, à toutes les *charges* qu'il supporte. Donc, inversement, ce point *peut* développer sur le corps une réaction dont l'intensité et la direction peuvent être *arbitraires*.

Il n'en est pas de même lorsqu'un corps, au lieu d'avoir un point fixe, *repose* par un point sur un plan. La direction de la charge à laquelle le plan résiste n'est pas arbitraire.

On dit qu'il y a *glissement sans frottement* sur un plan si ce plan ne résiste qu'à des charges qui lui sont *normales* et dirigées de façon à presser le corps qu'il gêne sur lui.

Cette définition du glissement sans frottement correspond bien à la notion vulgaire que l'on a de la chose. Dire, en effet, qu'un corps glisse sans frottement sur un plan c'est dire que le plan s'oppose à tout déplacement du corps dans une direction perpendiculaire à lui, mais n'offre aucune résistance à un déplacement parallèle au plan, à un *glissement*. Si la charge du point d'appui c'est-à-dire l'action du

corps sur le plan n'était pas normale au plan il en serait de même de la réaction AR du plan sur le corps (fig. 56) qui est directement opposée à la charge. Cette réaction AR pourrait être décomposée en deux forces : l'une AN normale au plan, l'autre AT parallèle au plan. La composante AN s'opposerait à un déplacement du corps dans une direction normale au plan ; mais la composante AT s'opposerait à tout déplacement, à tout glissement, dans le sens TA ce qui ne peut pas être. Donc :

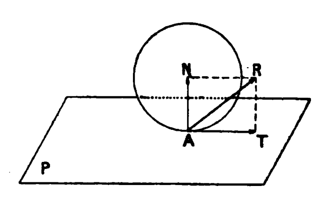


Fig. 56.

Lorsqu'un corps repose sur un plan, sur lequel il glisse sans frottement, toutes les réactions que peut développer le plan sur lui, aux divers points de contact, sont perpendiculaires au plan et dirigées de façon à éloigner le corps du plan.

96. **Conséquence.** — Nous admettrons, dans la suite, que tous les appuis sont toujours capables de résister à toutes les charges auxquelles ils peuvent être soumis si grandes que soient ces charges, *pourvu qu'elles aient des directions compatibles avec le mode de liaison.*

On arrive alors à la conclusion suivante :

Pour qu'un corps solide gêné soit en équilibre, il faut et il suffit qu'on puisse trouver des forces (réactions) appliquées aux divers points d'appuis, dont les directions sont compatibles avec les liaisons, et faisant équilibre aux forces qui agissent sur ce corps.

Supposer en effet l'existence de ces forces, c'est admettre que toutes les forces qui agissent sur le

corps solide peuvent être remplacées par un autre système de forces (*charges*) appliquées aux divers appuis et dont les directions sont telles qu'elles soient détruites par la résistance des appuis. Toutes les forces étant ainsi détruites par les résistances des appuis, le corps est bien en équilibre.

Par exemple, si un corps repose sur un plan, avec glissement sans frottement, il faut et il suffit, pour qu'il y ait équilibre, qu'on puisse trouver des forces appliquées aux divers points d'appuis, normales au plan, dirigées de façon à écarter le corps du plan et faisant équilibre aux forces qui agissent sur le corps.

97. ***Équilibre d'un corps ayant un point fixe.*** — Si des forces, en nombre quelconque, agissent sur un corps qui est mobile en tous sens autour d'un point fixe, on peut les réduire en une force unique OR, qui est appliquée au point fixe, et à un couple (F,—F), (n°**80**) (fig. 57). La force R est détruite par la fixité du point O ; il faut et il suffit, pour qu'il y ait équilibre, que le moment du couple soit nul.

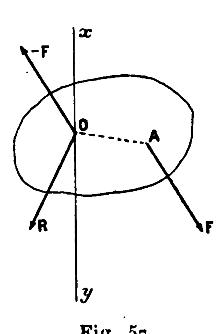


Fig. 57.

Supposons, en effet, qu'il ne le soit pas. Le corps est alors soumis à deux forces F et —F ; dont une, la force — F, peut être supposée appliquée au point O et est détruite par la fixité du point tandis que la ligne d'action de l'autre ne passe pas par le point fixe.

Il ne peut alors y avoir équilibre ; car, si le corps sous l'influence de la force F était en équilibre, en menant par le point O un axe xy perpendiculaire au plan OAF et fixant cet axe, on ne ferait que renforcer cet équilibre. Dans ces conditions on aurait un corps,

qui pourrait tourner autour d'un axe fixe, soumis à une seule force F perpendiculaire à cet axe et ne le rencontrant pas et on sait que dans ce cas (n° **18**) il n'y a pas équilibre.

Par suite, la condition d'équilibre d'un corps qui a un point fixe, peut se formuler ainsi :

Il faut et il suffit que le moment du couple résultant du transport de toutes les forces au point fixe O *soit nul.*

La charge du point d'appui est égale à la résultante générale de toutes les forces transportées au point O.

98. Cas particulier. — Si les forces sont toutes situées dans un même plan, le moment du couple résultant est égal à la somme algébrique des moments de toutes les forces considérées par rapport au point O (n° **90**), et par suite la condition d'équilibre est celle-ci :

Il faut et il suffit que la somme algébrique des moments de toutes les forces considérées, par rapport au point O, *soit nulle.*

99. ***Équilibre d'un corps ayant un axe fixe.*** — Pour trouver la condition d'équilibre d'un corps qui a un axe fixe, nous ferons d'abord la remarque préliminaire suivante :

Toute force qui agit sur un corps qui peut tourner librement autour d'un axe fixe peut être remplacée par un couple ayant son plan perpendiculaire à l'axe et dont le moment est égal au moment de la force par rapport à l'axe.

Soit un corps pouvant tourner autour de l'axe xy (fig. 58) et une force AF agissant sur ce corps. Décom-

posons AF en deux forces AF_1 et AF_2 l'une perpendiculaire à l'axe, l'autre parallèle à l'axe. La force AF_2 qui est parallèle à l'axe est détruite (n° **31**) par la résistance de l'axe. Il ne reste donc que la force AF_1. Menons par AF_1 le plan P perpendiculaire à l'axe xy, qui le coupe en O et transportons la force AF_1 en Of_1. Il nous faut introduire un couple $(F_1, -f_1)$ dont le moment est égal au moment de AF_1 par rapport à O, c'est-à-dire (n° **63**) au moment de la force AF par rapport à l'axe xy. La force Of_1 étant détruite par la résistance de l'axe, il ne reste bien que le couple $(F_1, -f_1)$.

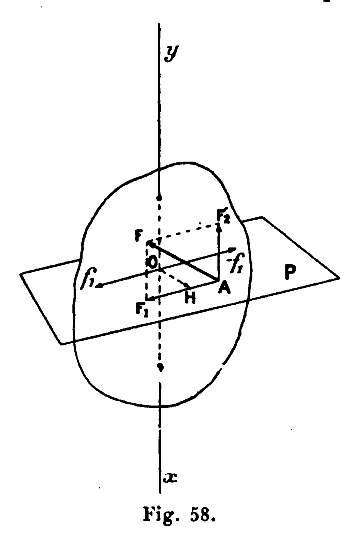


Fig. 58.

Ceci posé, considérons un corps solide qui peut tourner librement autour d'un axe xy et est soumis à un certain nombre de forces. Chacune de ces forces peut être remplacée par un couple dont le plan est perpendiculaire à l'axe et tous ces couples se composent en un seul dont le plan est aussi perpendiculaire à l'axe. Pour qu'il y ait équilibre il faut et il suffit que le moment de ce couple soit nul. Car si ce moment n'était pas nul, on pourrait toujours placer ce couple

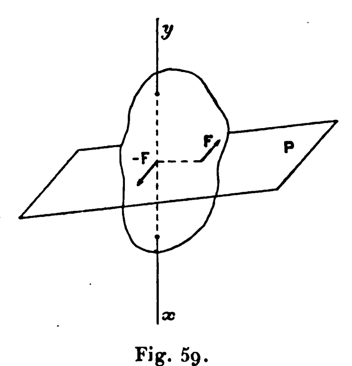


Fig. 59.

(F, —F) (fig. 59) dans son plan de façon que l'une des deux forces, —F par exemple soit appliquée en un point de l'axe et, par suite, soit détruite par la résistance de l'axe. Le corps ne serait alors soumis qu'à la seule force F ne rencontrant pas l'axe et ne serait pas en équilibre.

Or, puisque tous les couples sont dans des plans parallèles, le moment du couple résultant (n° 78) est la somme algébrique des moments des couples composants. Comme, d'ailleurs, d'après ce que nous venons de voir, les moments des couples composants sont, respectivement, égaux aux moments des forces par rapport à l'axe xy, on parvient à l'énoncé suivant :

Pour qu'un corps, qui peut tourner librement autour d'un axe fixe, soit en équilibre il faut et il suffit que la somme algébrique des moments, par rapport à l'axe, des forces auxquelles il est soumis, soit nulle.

100. *Équilibre d'un corps reposant par deux points sur un plan.* — Pour qu'un corps reposant par deux points A et B sur un plan P, sur lequel il glisse sans frottement, et sollicité par un certain nombre de forces soit en équilibre, il faut et il suffit (n° 96) qu'on puisse trouver deux forces X et Y (réactions), appliquées en A et B (fig. 60) perpendiculaires au plan, dirigées de façon à écarter le corps du plan et faisant équilibre à toutes les forces données.

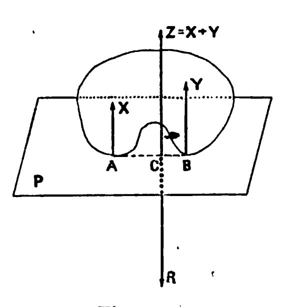


Fig. 60.

Supposons que ces deux forces X et Y existent; comme elles sont parallèles, de même sens et appli-

quées en A et B, elles ont une résultante Z égale à leur somme et appliquée en un point C de la droite AB.

La résultante Z doit équilibrer toutes les forces qui agissent sur le corps solide. Donc, ces forces doivent avoir une équilibrante unique et par conséquent une résultante. Telle est la première condition d'équilibre.

Cette résultante doit être égale et directement opposée à la force Z : elle est donc perpendiculaire au plan et, de plus, sa direction doit rencontrer la droite AB en un point C situé entre les points A et B.

Ces conditions sont nécessaires.

Elles sont suffisantes, car si elles sont remplies, on peut trouver deux forces X et Y perpendiculaires au plan et remplissant les conditions précédentes.

On a, en effet, pour les déterminer, la double égalité :

$$\frac{X}{CB} = \frac{Y}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

De là résulte l'énoncé suivant :

Pour qu'un corps solide qui repose sur un plan par deux points et glisse sans frottement sur ce plan soit en équilibre, il faut et il suffit que toutes les forces appliquées au corps admettent une résultante unique, perpendiculaire au plan, dont la ligne d'action rencontre la droite qui joint les deux points de contact en un point situé entre eux et dirigée de façon à appuyer le corps sur le plan

101. Cas particulier. — *Corps pesant reposant sur un plan par deux points.*

Les actions de la pesanteur sur le corps ont une résultante unique qui est le *poids* du corps appliquée en un point que l'on appelle le centre de gravité du corps (voy. plus loin Ch. VI). Ce poids étant vertical, pour qu'il y ait équilibre, il faut que le plan sur lequel repose le corps, soit perpendiculaire à la verticale, donc *horizontal*. De plus il faut *que la verticale du centre de gravité rencontre la droite qui joint les deux points de contact en un point situé entre eux.*

102. Équilibre d'un corps reposant par trois points sur un plan. — Considérons un corps reposant sur un plan P par trois points A, B, C (fig. 61) et soumis à un certain nombre de forces. En chacun des points d'appui le plan développe une réaction qui est normale au plan, et dirigée dans le sens de la flèche. Ces trois forces X, Y, Z, parallèles et de même sens, ont une résultante unique : composons X et Y, ces deux forces ont une résultante T égale à X + Y et appliquée en un certain point D de la droite AB compris entre A et B ; composons T et Z, ces deux forces parallèles ont une résultante S égale à

$$S = T + Z = X + Y + Z$$

et appliquée en un certain point I de la droite CD entre D et C.

Donc le point I est à *l'intérieur* du triangle ABC.

La résultante S des réactions doit équilibrer toutes les forces qui agissent sur le corps solide. Donc ces forces doivent avoir une équilibrante et par conséquent une résultante R égale et directement opposée à S. Comme S est normale au plan, R sera normale au plan, sa direction rencontrera le plan en un point I

situé à l'intérieur du triangle ABC, et elle sera dirigée de façon à presser le corps sur le plan.

Ces conditions sont nécessaires.

Elles sont suffisantes : en effet, décomposons la résultante R en deux forces appliquées en C et D, le point D étant obtenu en menant IC et prolongeant cette droite jusqu'à sa rencontre avec AB. Soient T et Z les deux forces égales et directement opposées à ces dernières ; elles équilibrent la force R et on peut écrire

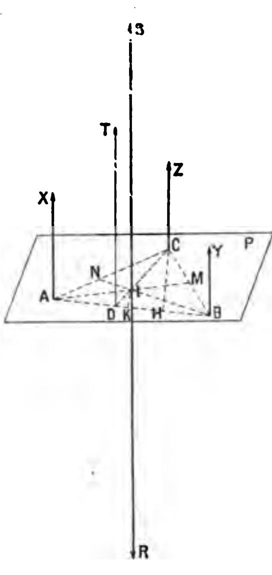


Fig. 61.

$$\frac{T}{IC} = \frac{Z}{ID} = \frac{R}{CD}.$$

De cette double égalité on tire les valeurs de T et de Z. Mais ensuite la force T peut être décomposée en deux forces X et Y appliquées en A et B, et déterminées par les égalités

$$\frac{X}{DB} = \frac{Y}{AD} = \frac{T}{AB}.$$

On peut donc déterminer des forces X, Y, Z appliquées aux points A, B, C faisant équilibre à R et ces trois forces sont perpendiculaires au plan P, dirigées de façon à écarter le corps du plan; la condition est donc suffisante.

De là résulte l'énoncé suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps qui repose par trois points sur un plan, sur lequel il glisse sans frottement, et qui est soumis à un certain nombre de forces soit en équilibre, est que toutes ces forces aient une résultante unique, normale au plan, qui rencontre ce plan en un point situé à l'intérieur du triangle d'appui et dirigée de telle sorte qu'elle presse le corps sur le plan.

103. Calcul des réactions. — Joignons le point I aux points A, B, C. On a :

$$\frac{Z}{R} = \frac{ID}{CD}. \quad (1)$$

Menons les hauteurs CH et IK des triangles ACB et AIB; ces triangles ayant même base AB, sont entre eux comme leurs hauteurs et aussi comme les droites CD et ID, on a donc, en représentant par AIB et ABC les surfaces de ces triangles,

$$\frac{IK}{CH} = \frac{ID}{CD} = \frac{AIB}{ABC}. \quad (2)$$

En comparant les relations (1) et (2) on en tire

$$\frac{Z}{R} = \frac{AIB}{ABC} \quad \text{ou} \quad \frac{Z}{AIB} = \frac{R}{ABC}.$$

On prouverait de même que

$$\frac{X}{R} = \frac{IM}{AM} = \frac{CIB}{ABC} \quad \text{ou} \quad \frac{X}{CIB} = \frac{R}{ABC}.$$

et que

$$\frac{Y}{R} = \frac{IN}{BN} = \frac{AIC}{ABC} \quad \text{ou} \quad \frac{Y}{AIC} = \frac{R}{ABC}.$$

On a donc la suite des rapports égaux :

$$\frac{X}{CIB} = \frac{Y}{AIC} = \frac{Z}{AIB} = \frac{R}{ABC}.$$

Ceci prouve que *chacune des quatre forces* X, Y, Z, R *est proportionnelle à la surface du triangle formé par les points d'application des trois autres.*

Ces relations permettent de calculer X, Y, Z, c'est-à-dire les *réactions* du plan ou les *charges.*

104. Cas particulier. — *Cas d'un corps pesant reposant sur un plan par trois points.*

Ici, les actions de la pesanteur sur le corps ont une résultante unique qui est le poids du corps appliqué au centre de gravité ; ce poids étant vertical pour qu'il y ait équilibre, le plan sur lequel repose le corps *doit être horizontal.* De plus, il faut que la direction du poids ou *la verticale du centre de gravité du corps rencontre le plan en un point situé à l'intérieur du triangle d'appui.*

105. ***Équilibre d'un corps reposant par plus de trois points sur un plan.*** — Considérons un corps reposant sur un plan par plusieurs points d'appui non en ligne droite. Soient A, B, C, D, E ceux de ces points d'appui qui sont tels que le polygone convexe ABCDE comprenne à son intérieur tous les autres points d'appui, s'il y en a (fig. 62). Ce polygone est ce qu'on appelle le *polygone de sustentation.*

Pour que le corps soit en équilibre, il faut et il suffit qu'il existe une résultante unique R *perpendiculaire au plan, dont la ligne d'action rencontre le plan en un point situé à l'intérieur du polygone de*

sustentation, et qui soit dirigée de façon à presser le corps sur le plan.

Cette condition est nécessaire. En effet, si le corps est en équilibre, les réactions X, Y, Z, V, W, etc. aux points d'appui sont normales au plan, elles ont une résultante normale au plan, dont le point d'application est situé à l'intérieur du polygone de sustentation et qui fait équilibre aux forces.

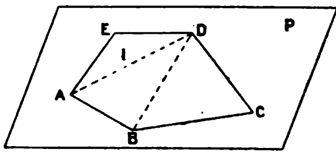


Fig. 62.

La condition est suffisante : joignons le point D aux points A, B et C ; nous partageons ainsi le pentagone ABCDE en trois triangles. S'il existe une résultante unique R répondant aux conditions précédentes et dont la ligne d'action rencontre le plan P en un point I situé à l'intérieur du pentagone, ce point I tombe à l'intérieur d'un des triangles, soit le triangle AED. On peut alors supprimer les points C et B et le corps est en équilibre avec les seuls appuis A, D, E.

Pour calculer les réactions aux points d'appui, on peut supposer que les réactions en B et C et aux autres points, sauf A, E, D, sont nulles, et calculer les réactions en A, E, D (n° **103**).

Mais on ne peut pas affirmer qu'il en est ainsi en réalité et les charges sont théoriquement *indéterminées*.

Dans la pratique, cette indétermination n'existe pas : cette contradiction tient à ce que nous avons supposé les plans sur lesquels s'appuient les corps et les corps eux-mêmes absolument indéformables, tandis qu'en réalité il n'y a aucun corps dans la nature qui le soit rigoureusement.

CHAPITRE V

NOTIONS DE STATIQUE GRAPHIQUE

§ 1. — Principes généraux

106. *But de la statique graphique.* — La majorité des problèmes de statique que l'on a à résoudre en Construction sont des problèmes où il s'agit de composer ou de décomposer des forces *situées dans un même plan.*

Le but de la statique graphique est de remplacer le calcul par des constructions graphiques, de résoudre les problèmes de composition et de décomposition de forces, de couples et de moments, dans le cas de forces situées toutes dans un même plan, au moyen du trait, par des tracés spéciaux qui restent dans les limites de la feuille de l'épure.

107. *Rappel des divers cas.* — Quand des forces en nombre quelconque sont situées dans un même plan, trois cas peuvent se présenter :

1° *Les forces ont une résultante unique* : Ce cas se présente lorsqu'en faisant la réduction des forces le polygone ne se ferme pas (n° **88**). La résultante unique est, en grandeur et en direction, obtenue en fermant le polygone des forces; il reste à déterminer sa position.

2° *Les forces se réduisent à un couple.*

3° *Les forces se font équilibre.*

Ces deux derniers cas se présentent lorsqu'en faisant la réduction des forces le polygone se ferme.

108. ***Dynamique.*** — Considérons un système d'un nombre quelconque de forces situées dans un même plan, soient trois forces F_1, F_2, F_3, par exemple. Prenons un point O quelconque dans le plan (fig. 63) et menons le segment Of_1 égal et parallèle à F_1, puis, par l'extrémité de f_1 menons le segment f_1f_2 égal et parallèle à F_2 et enfin par l'extrémité f_2, le segment f_2f_3 égal et parallèle à F_3.

Si le point f_3 ne coïncide pas avec le point O, il y a une résultante unique et elle est en grandeur et en direction représentée par la droite Of_3.

La figure $Of_1f_2f_3$ s'appelle le polygone des forces ou le *dynamique.*

Par la construction du dynamique, on reconnaît si un système de forces situées dans un même plan a ou n'a pas de résultante unique.

109. RÈGLE POUR CONSTRUIRE LE DYNAMIQUE : *On prend un point* O *arbitraire dans le plan et de* O *comme point de départ, on mène, successivement, bout à bout, des segments égaux aux forces et, de même sens qu'elles. On a une ligne brisée qu'on appelle le* DYNAMIQUE.

Si l'extrémité de la ligne brisée ne coïncide pas avec le point de départ O, *on a une résultante unique qui est représentée en grandeur et en direction par le segment qui joint le point* O *au point final.*

Si l'extrémité de la ligne brisée coïncide avec le point de départ O, *le dynamique se ferme et les forces se réduisent à un couple ou se font équilibre.*

REMARQUE. — Lorsque les forces sont très grandes,

on peut, pour obtenir des constructions restant dans les limites de l'épure, réduire l'échelle des forces pour construire le dynamique. Par exemple, on peut

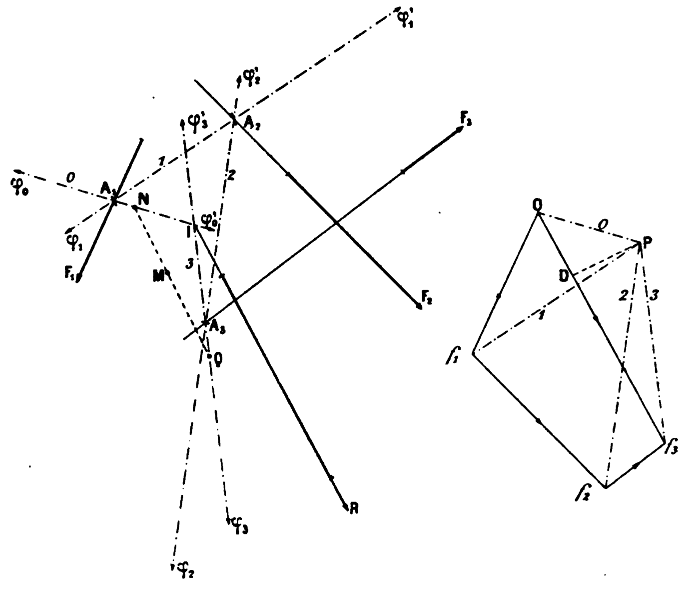


Fig. 63.

réduire les forces à 1/2, 1/4 de leur vraie grandeur.

On remplace ainsi le dynamique par un polygone semblable, mais rien n'est modifié dans les constructions qui vont suivre.

110. ***Funiculaire.*** — Dans le cas d'une résultante unique, on connaît *sa grandeur et sa direction* (cette force est égale et parallèle à Of_3, dans l'exemple pré cédent), et il reste à trouver sa *position*.

Lorsqu'il s'agit d'un couple ou de forces se faisant

équilibre, il reste à reconnaître dans quel cas l'on est et à trouver *le moment du couple*.

On résout la question, dans tous les cas, au moyen du *funiculaire*.

111. Règle pour tracer le funiculaire. — *On prend dans le plan, au voisinage du dynamique un point* P *qu'on appelle le* pole *et on joint ce point* P *aux divers sommets du dynamique : les droites ainsi menées s'appellent* rayons polaires, *on les numérote 0, 1, 2, 3,.... dans le sens de parcours du dynamique.*

Ceci posé, on mène (fig. 63) *une parallèle quelconque au rayon 0 qui coupe la ligne d'action de la première force* F_1 *en un point* A_1, *on la numérote 0 ; par* A_1 *on mène une parallèle au rayon 1 qui coupe la ligne d'action de la force* F_2 *au point* A_2, *on la numérote 1 ; par* A_2 *on mène une parallèle au rayon 2 qui coupe la force* F_3 *au point* A_3, *on la numérote 2 ; et ainsi de suite, s'il y a plus de trois forces. Par le dernier point* (*ici c'est* A_3) *on mène une parallèle au dernier rayon polaire* (*ici 3*), *on forme ainsi une ligne brisée ouverte* (*0* A_1 A_2 A_3 *3*) *qu'on appelle* le funiculaire.

1° Si le dynamique n'est pas fermé, le rayon initial et le rayon final du funiculaire se coupent ; leur point d'intersection est un point de la ligne d'action de la résultante. Soit I *ce point. Dès lors, pour avoir la résultante, il suffit de mener par le point* I *une force égale et parallèle à la résultante connue* Of_3, *et on a en* IR *la résultante cherchée.*

2° Si le dynamique s'était fermé, il peut arriver pour le funiculaire, deux cas :

Les rayons initial et final sont parallèles et ne coïncident pas ; les forces du système se réduisent alors à un couple et le moment de ce couple s'obtient

en multipliant la longueur du rayon polaire initial, mesurée à l'échelle des forces, par la distance du rayon initial et du rayon final du funiculaire, mesurée à l'échelle des longueurs.

Les rayons initial et final coïncident; les forces du système se font équilibre.

Nous allons justifier cette construction.

112. Lemme. — *Un système de trois forces concourantes respectivement égales et parallèles aux côtés d'un triangle, parcouru dans un certain sens, est en équilibre.*

Soient en effet (fig. 64) trois forces concourantes OA, OB, OC, respectivement parallèles aux côtés du triangle *abc* parcouru dans le sens indiqué. Le triangle *abc* n'est autre que le dynamique des forces OA, OB, OC, et comme il se ferme, les forces se font équilibre ou se réduisent à un couple. Puisqu'elles sont appliquées au même point O, elles ne peuvent se réduire à un couple ; elles se font donc équilibre.

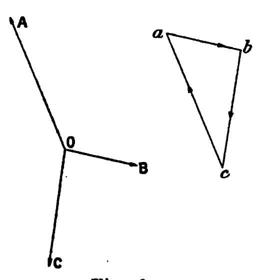


Fig. 64.

Plus généralement,

Un système de plusieurs forces concourantes respectivement égales et parallèles aux côtés d'un polygone fermé, parcouru dans un certain sens, est en équilibre.

113. *Démonstration.* Premier cas. — Examinons d'abord le premier cas, où le dynamique ne se ferme pas. Considérons trois forces F_1, F_2, F_3 (fig. 63) ; et

supposons le dynamique et le funiculaire tracés suivant les Règles des n[os] **109** et **111**. Au point A_1 menons deux forces égales, de sens contraires et égales en intensité au rayon polaire OP ; ces forces φ_0 et φ_0' sont dirigées suivant le rayon o du funiculaire. De même au point A_2 appliquons deux forces φ_1 et φ_1' dirigées suivant le rayon 1 du funiculaire, égales, de sens contraires et égales en intensité au rayon polaire Pf_1. Au point A_3 appliquons deux forces, φ_2 et φ'_2 dirigées suivant le rayon 2 du funiculaire, égales, de sens contraires et égales en intensité au rayon polaire Pf_2. Enfin, au point A_3 appliquons deux forces, φ_3 et φ_3' dirigées suivant le rayon 3 du funiculaire, égales, de sens contraires et égales en intensité au rayon polaire Pf_3. L'état du corps n'est pas changé puisque nous avons introduit des forces se faisant deux à deux équilibre.

Ceci posé, prenons les forces φ_0, F_1, φ_1' qui concourent au point A_1 ces trois forces sont parallèles et égales aux côtés du triangle POf_1, parcouru dans le sens PO ; donc, d'après le lemme, ces forces se font équilibre. Les trois forces φ_1, F_2, φ'_2 appliquées au point A_2, parallèles et égales aux côtés du triangle Pf_1f_2 parcouru dans le sens Pf_1, se font équilibre. Les trois forces φ_2, F_3, φ_3' appliquées au point A_3, parallèles et égales aux côtés du triangle Pf_2f_3 parcouru dans le sens Pf_2 se font équilibre.

On peut donc supprimer ces neuf forces, et il ne reste plus que les forces φ_0' et φ_3 dirigées suivant le rayon initial o et le rayon final 3. Ces deux forces ont une résultante unique qu'on obtient en composant φ_0' et φ_3 : cette résultante passe par le point I d'intersection des rayons initial et final, c'est donc bien la force IR ; ce qui légitime la construction.

114. DEUXIÈME CAS. — Supposons, en second lieu, que le dynamique se ferme.

Considérons quatre forces F_1, F_2, F_3, F_4 (fig. 65) traçons le dynamique $Of_1f_2f_3f_4$ qui se ferme, f_4 coïncidant avec O. Prenons un pôle P au voisinage du dynamique, menons les rayons polaires et remarquons que les rayons o et 4 coïncident. Construisons

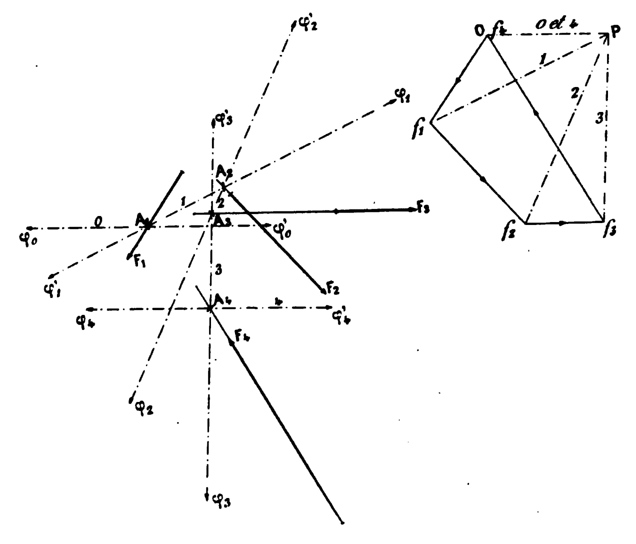


Fig. 65.

le funiculaire $oA_1A_2A_3A_44$. On voit dans la figure que les deux côtés o et 4 sont parallèles comme étant tous deux parallèles au même rayon polaire PO et qu'ils ne coïncident pas. Démontrons que les forces se réduisent à un couple.

Comme dans le cas précédent, appliquons en chaque point A_1, A_2, A_3, A_4 deux forces égales, de sens contraires et égales en intensités aux rayons polaires o, 1, 2, 3, 4.

Pour la même raison que dans le cas précédent les forces φ_0, F_1, φ_1 se font équilibre; de même que φ_1', φ_2', F_2; de même que φ_2, F_3, φ_3'; de même que φ_3, F_4, φ_4'.

Il ne reste donc plus que les forces φ_0' et φ_4. Ces deux forces ont même intensité OP, elles sont toutes deux parallèles au rayon polaire OP, elles sont en outre de sens contraires et non directement opposées. Elles forment donc un couple. Ce qu'il fallait démontrer.

Le moment du couple φ_0', φ_4 est donné par le produit

$$OP \times d,$$

d étant la distance des deux parallèles o et 4. On doit mesurer OP à l'échelle des forces et d à l'échelle des longueurs.

115. Troisième cas. — Si les rayons o et 4 coïncidaient, les forces φ_0' et φ_4 seraient égales et directement opposées, elles se feraient équilibre et le système de forces serait en équilibre. Il résulte de là, que :

Pour qu'un système de forces situées dans un même plan soit en équilibre, il faut et il suffit que le dynamique se ferme ainsi que le funiculaire.

116. ***Digression sur la mesure des grandeurs.*** — Le rapport de deux grandeurs est égal au quotient de leurs mesures, quelle que soit l'unité choisie.

Ainsi, si les longueurs de deux portions de droites sont 3 mètres et 2 mètres, leur rapport est $\frac{3}{2}$. Si on mesure les mêmes longueurs en prenant pour unité le centimètre, leurs mesures seront 300 et 200; le quotient de ces deux mesures $\frac{300}{200}$ est encore $\frac{3}{2}$.

Cela étant, soient quatre grandeurs A, B, C, D, formant la proportion

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Aux grandeurs elles-mêmes A, B, C, D, on peut substituer, dans les rapports, leurs mesures, *à la condition de mesurer avec la même unité les grandeurs qui sont dans un même membre.*

Nous indiquerons l'unité choisie pour mesurer une grandeur A de la manière suivante :

$(A)_f$ si la grandeur A est mesurée à l'*échelle des forces.*

$(A)_l$ si elle est mesurée à *l'échelle des longueurs.*

117. Détermination des moments. — *Lorsqu'on a exécuté une épure de statique graphique, le moment d'une force quelconque du système considéré, par rapport à un point du plan, s'obtient en menant par ce point une parallèle à la direction de la force, en prenant la portion de cette parallèle comprise entre les deux côtés du funiculaire qui se coupent sur la force et en faisant le produit de cette longueur, mesurée à l'échelle des forces, par la distance du pôle à la parallèle à la force, dans le dynamique, mesurée à l'échelle des longueurs.*

En effet, soit un certain dynamique $Of_1f_2f_3$ (fig. 66) et soit F_2 l'une des forces du système.

Le moment de la force F_2 par rapport au point M du plan est

$$\mathfrak{M}_M F_2 = (F_2)_f \times (MH)_l, \qquad (1)$$

MH étant la perpendiculaire abaissée du point M sur la force F_2.

Transformons cette relation. Pour cela menons par le point M une parallèle à la force F_2; cette parallèle rencontre les rayons 2 et 3 du funiculaire qui se coupent sur F_2 aux points N et Q et soit A_2 le point

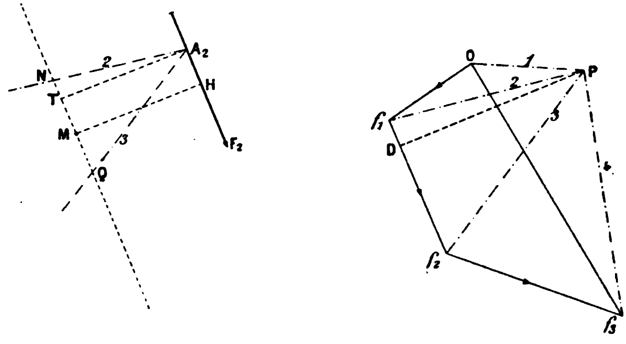


Fig. 66.

d'intersection de ces deux rayons sur la force F_2. Menons de A_2 la perpendiculaire A_2T à la force F_2, on a

$$HM = A_2T$$

comme parallèles comprises entre parallèles.

Abaissons dans le dynamique la perpendiculaire PD sur la force f_2 parallèle à F_2 : PD est ce qu'on appelle la *distance polaire*.

Les triangles Pf_2f_1 et QA_2N sont semblables comme ayant leurs côtés respectivement parallèles, donc le rapport des bases est égal au rapport des hauteurs et on a

$$\frac{f_1f_2}{NQ} = \frac{PD}{A_2T};$$

ce qu'on peut écrire (n° **116**)

$$\frac{(f_1f_2)_f}{(NQ)_f} = \frac{(PD)_l}{(A_2T)_l}$$

et, comme $(f_1f_2)_f = (F_2)_f$,

$$\frac{(F_2)_f}{(NQ)_f} = \frac{(PD)_l}{(A_2T)_l};$$

faisant le produit des extrêmes et des moyens, on a .

$$(F_2)_f \times (A_2T)_l = (NQ)_f \times (PD)_l.$$

Mais le premier membre n'est autre que le moment de la force F_2 par rapport au point M, d'après l'égalité (1), on a donc

$$\mathfrak{M}_M F_2 = (NQ)_f \times (PD)_l,$$

ce qui démontre le théorème.

118. ***Application I.*** — *Moment de la résultante de plusieurs forces par rapport à un point du plan.*

La résultante est la force sur laquelle se croisent les rayons initial et final du funiculaire (fig. 63).

Le moment de la résultante par rapport à un point M du plan s'obtient (n° **117**) en menant par le point M une parallèle à la direction de la résultante. Cette parallèle coupe les rayons initial et final en des points N et Q et on a

$$\mathfrak{M}_M R = (NQ)_l \times (PD)_l,$$

PD étant la perpendiculaire abaissée du pôle sur la résultante, dans le dynamique.

119. ***Application II.*** — *Moment d'une résultante partielle par rapport à un point du plan.*

Considérons quatre forces F_1, F_2, F_3, F_4 (fig. 67) situées dans le même plan, traçons le dynamique $of_1f_2f_3f_4$; prenons un pôle P et menons les rayons polaires o, 1, 2, 3, 4. Construisons le funiculaire.

Ceci posé, considérons deux forces F_2, F_3, et cherchons la résultante de ces deux forces. Le dynamique relatif à ces deux forces est $f_1f_2f_3$ et la résultante partielle de F_2, F_3 est f_1f_3 en grandeur et en

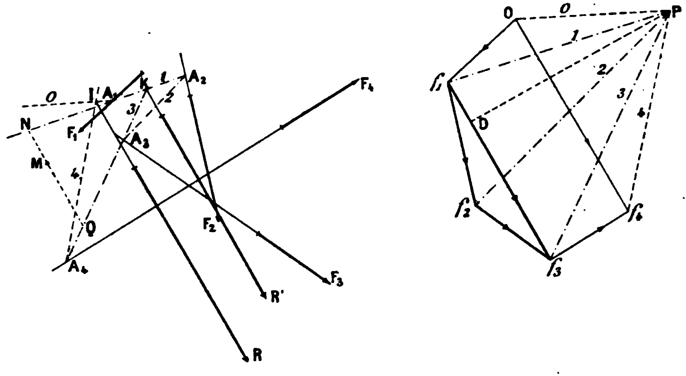


Fig. 67.

direction. Pour avoir sa position, du pôle P, on mène les rayons polaires 1, 2, 3 ; les rayons initial et final sont alors 1, 3 qui se coupent en un point K qui est un point de la ligne d'action de la résultante partielle.

On mène alors par K une parallèle à f_1f_3 on porte sur cette parallèle un segment égal à f_1f_3 et on a la résultante R′ des deux forces F_2, F_3.

Son moment par rapport à un point M du plan s'obtient en menant par M une parallèle à la résultante partielle f_1f_3 ; cette parallèle coupe les rayons initial et final 1, 3, en des points N et Q et on a

$$\mathfrak{M}_M(R') = (NQ)_f \times (PD)_l,$$

PD étant la perpendiculaire abaissée du pôle sur la résultante partielle f_1f_3.

Cette construction ne réussit que pour des forces consécutives dans le dynamique total.

120. ***Cas des forces parallèles.*** — Considérons des forces parallèles (fig. 68) F_1, F_2, F_3, F_4, de même sens, situées toutes dans un même plan et appliquées à un corps solide. Construisons le dynamique.

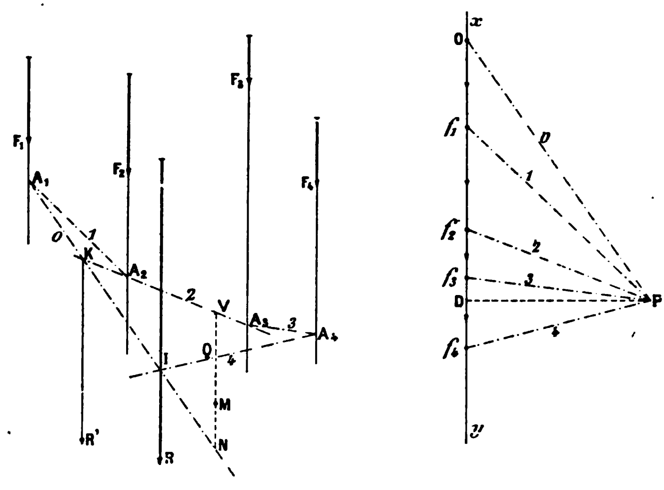


Fig. 68.

Comme les forces sont parallèles, les forces f_1, f_2, f_3, f_4 respectivement égales à F_1, F_2, F_3, F_4 seront, dans le dynamique, en ligne droite sur une droite xy parallèle à la direction des forces.

Prenons, au voisinage du dynamique, un pôle P et menons les rayons polaires 0, 1, 2, 3, 4.

La résultante du système est représentée en intensité par la longueur Of_4 ; sa direction est celle des forces.

La distance polaire PD est la même pour toutes les forces et pour simplifier le calcul des moments

on prend quelquefois PD = 1, c'est-à-dire que l'on prend la distance polaire égale à l'unité de longueur, ou encore PD = 10.

Traçons le funiculaire : $oA_1A_2A_3A_44$.

L'intersection des rayons initial et final donne un point I qui est un point de la ligne d'action de la résultante ; et comme elle est parallèle aux forces données et d'intensité donnée par le segment Of_4 elle est donnée en grandeur et en position par la droite $R = Of_4$.

Le moment de la résultante par rapport à un point M du plan se détermine en menant par M une parallèle à la direction des forces. Cette parallèle coupe les rayons initial et final o, 4 en des points N et Q et on a, si $(PD)_l = 1$,

$$\mathfrak{M}_M R = (NQ)_f.$$

Si l'on considère la résultante partielle de deux forces consécutives F_1 et F_2, elle est égale à leur somme ; les rayons initial et final o et 2 se coupent en un point K qui est un point de la ligne d'action de cette résultante partielle.

On mène alors par K une parallèle aux forces et on porte sur cette parallèle un segment égal à Of_2 ; on a ainsi la résultante R' des deux forces F_1, F_2.

Son moment par rapport au point M du plan s'obtient en menant par M une parallèle à la direction des forces ; cette parallèle coupe les rayons initial et final o, 2 en des points N et V et on a

$$\mathfrak{M}_M R' = (NV)_f,$$

toujours en supposant $(PD)_l = 1$.

121. ***Échelle des moments pour les forces paral-***

lèles. — Nous avons supposé dans ce qui précède (*cas des forces parallèles*) que la distance polaire est égale à l'unité de longueur ou dans un rapport simple avec cette unité, il est quelquefois plus commode et même nécessaire de ne pas agir ainsi, et, dans ce cas, on construit une *échelle des moments*.

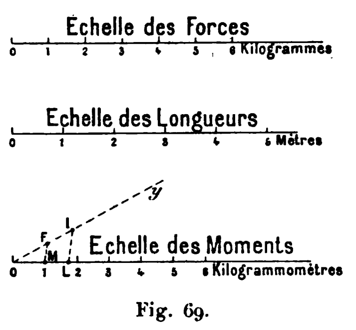


Fig. 69.

Soit une échelle de forces (fig. 69) et une échelle de longueurs.

Construire une échelle des moments c'est construire une échelle telle qu'il suffise de mesurer à cette échelle les longueurs interceptées entre les rayons du funiculaire par les parallèles aux forces pour avoir directement les moments.

Soit d la distance polaire commune des forces mesurée à l'échelle des forces, le moment d'une force est (fig. 68)

$$\mathfrak{M}_M R' = (NV)_f \times d. \qquad (1)$$

Il faut trouver une nouvelle échelle telle que

$$(NV)_f \times d = (NV)_m. \qquad (2)$$

Cherchons l'unité de la nouvelle échelle et pour cela cherchons la longueur X telle que :

$$(X)_m = 1$$

on a alors

$$(X)_f \times d = 1$$

ou

$$(X)_f = \frac{1}{d}$$

ou

$$\frac{X}{\text{unité de force}} = \frac{\text{unité de longueur}}{\text{distance polaire}};$$

donc la longueur X est à l'unité de force comme l'unité de longueur est à la distance polaire.

Ceci revient à construire une quatrième proportionnelle.

Menons, à cet effet, une droite sur laquelle nous portons une longueur OL égale à l'unité de longueur.

Par O menons une droite quelconque Oy sur laquelle nous prenons OF égale à l'unité de force et OI égale à la distance polaire.

Joignons IL et par F menons une parallèle à IL qui coupe OL en M. OM est la longueur cherchée, car on a :

$$\frac{OM}{OF} = \frac{OL}{OI}$$

ou

$$\frac{OM}{\text{unité de force}} = \frac{\text{unité de longueur}}{\text{distance polaire}}.$$

Avec OM comme unité, on peut construire une échelle des moments et alors pour avoir le moment de la force R′ par rapport au point M (fig. 68) il suffit de mesurer NV à la nouvelle échelle.

Il est évident que si l'échelle des forces a pour unité le *kilogramme* et celle des longueurs le *mètre*, l'échelle des moments aura pour unité le *kilogrammomètre*.

§ 2. — Détermination des charges aux appuis

122. ***Poutre horizontale reposant sur deux appuis de niveau.*** — Considérons une poutre, qui, outre son

propre poids P, supporte des charges isolées P_1, P_2, P_3 (fig. 70). (Nous représenterons toujours une poutre par une simple droite.)

Les réactions aux extrémités A et B sont évidemment verticales.

Le problème consiste donc à trouver deux forces

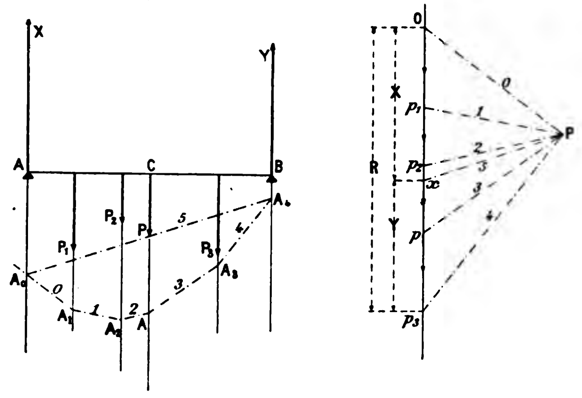


Fig. 70.

X et Y verticales, passant par A et B et telles qu'elles fassent équilibre aux forces données. Il faut par conséquent que le dynamique se ferme ainsi que le funiculaire.

Construisons le dynamique O $p_1 p_2 p p_3$. Pour fermer le dynamique il faut revenir du point p_3 au point O ; par conséquent à partir de p_3 il faut porter une force $p_3 x = Y$, puis une force $x\mathrm{O} = X$.

X et Y les deux réactions aux points d'appui seront donc connues quand on aura déterminé le point x.

Prenons un pôle P et menons les rayons polaires o, 1, 2, 3, 4. (Nous ne pouvons pas encore mener le rayon polaire 5 qui joint le pôle au point inconnu x).

Dessinons le funiculaire : menons un rayon initial

A_0A_1, parallèle au rayon polaire o, puis A_1A_2 parallèle à 1, A_2A parallèle à 2, AA_3 paralèlle à 3, A_3A_4 parallèle à 4. Cette dernière parallèle coupe la direction de la réaction Y au point A_4 ; le rayon initial coupe la direction de la réaction X au point A_0. Comme il faut que le funiculaire se ferme, le dernier côté du funiculaire est A_0A_4.

Par le pôle P menons une parallèle à A_0A_4 et nous avons ainsi le rayon polaire 5, d'où le point x cherché.

Ce qui donne les deux réactions $X = Ox$ et $Y = xp_3$ appliquées aux points A et B.

Pour reconnaître aisément celle des deux longueurs Ox ou xp_3 qui est X et celle qui est Y, il suffit de se rappeler que : *les rayons du funiculaire qui se coupent sur une force portent les mêmes numéros que les rayons polaires qui aboutissent à la force parallèle dans le dynamique.*

123. ***Poutre horizontale uniformément chargée.*** — Soit une poutre posée horizontalement sur deux appuis dont l'écartement est l, soit p la charge constante par unité de longueur ; la charge totale sera donc pl.

Les réactions en A et B sont évidemment égales et égales à $\frac{pl}{2}$.

124. ***Poutre horizontale encastrée.***— Considérons une poutre horizontale AB scellée à une de ses extrémités dans un mur vertical et soit A le point où elle émerge du mur (fig. 71). Supposons-la soumise à un certain nombre d'efforts verticaux P_1, P_2, P_3.

Si l'on réduit toutes ces forces au point A, ces trois

forces sont équivalentes à une résultante unique appliquée en A et à un couple de moment égal à la somme algébrique des moments des forces par rapport au point A (nº 90).

La force unique appliquée en A s'appelle l'*effort de cisaillement*; effort qui tend à rompre la barre au point A.

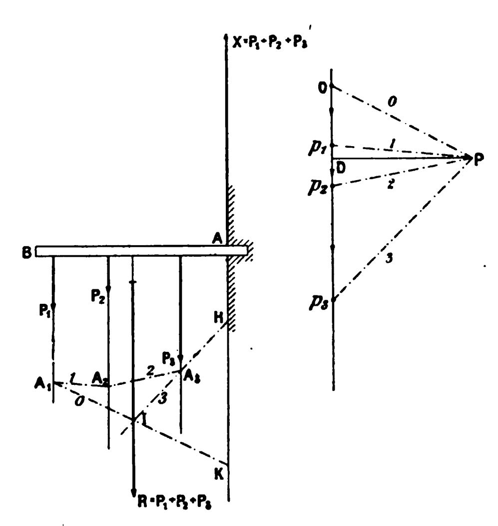


Fig. 71.

Le couple est ce qu'on appelle le *couple d'encastrement*; il tend à faire tourner la barre et à l'arracher du mur.

Il faut donc que le mur, la poutre et l'encastrement soient assez solides pour résister à l'effort de cisaillement et au couple d'encastrement.

Déterminons-les :

Pour cela, construisons le dynamique $op_1 p_2 p_3$, prenons un pôle P et menons les rayons polaires o, 1, 2, 3.

Nous avons en p_3O la résultante c'est-à-dire l'*effort de cisaillement*, en grandeur et en direction ; que nous figurons en X.

Dessinons le funiculaire A_1, A_2, A_3 ; les rayons initial et final se coupent en I qui est un point de la résultante $R = P_1 + P_2 + P_3$.

Le moment du *couple d'encastrement* est égal au moment de la résultante par rapport au point A. Pour avoir ce moment menons par A une parallèle à la direction des forces et prenons les intersections H et K de cette parallèle avec les rayons final et initial 3 et o.

On a (n° **117**)

$$\mathfrak{M}_A R = (HK)_f \times (PD)_l.$$

PD étant la perpendiculaire abaissée du pôle sur la direction des forces dans le dynamique.

Si l'on a construit une échelle des moments le moment de la résultante est :

$$\mathfrak{M}_A R = (HK)_m.$$

REMARQUE. — Dans le cas où la charge est uniformément répartie, on peut la réduire à une seule force appliquée au milieu de AB.

125. *Corbeau.* — Soit un mur vertical AC. Au point A est fixée une tige horizontale AB soulagée en B par une pièce oblique BC fixée au mur au point C (fig. 72).

Ces deux tiges forment ce qu'on appelle un *corbeau*, une *potence* ou une *console*.

Supposons que le corbeau soit soumis à un certain nombre d'efforts P_1, P_2, P_3 et déterminons les réactions en A et en C.

Admettons que la tige AB soit articulée en A, la

direction de la réaction en A sera alors dirigée suivant AB, il reste à déterminer son intensité, puis la direction inconnue et l'intensité de la réaction au point C.

Supposons pour un instant ces forces connues et construisons la dynamique $op_1 p_2 p_3$; à la suite de la force p_3, il faudrait porter une force horizontale p_3x

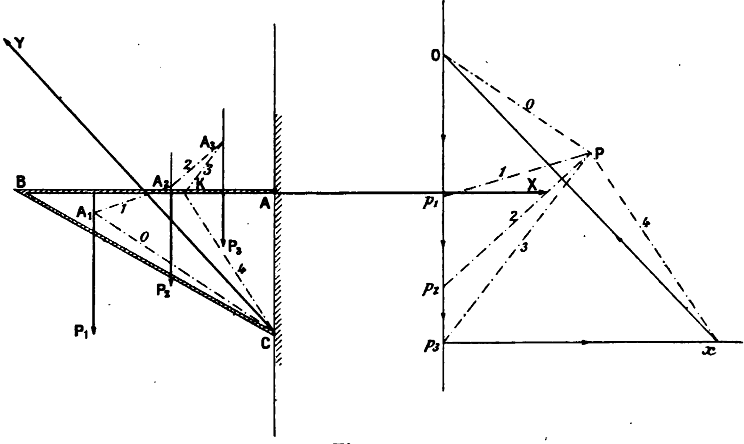


Fig. 72.

égale à la réaction X en A, puis, en portant une force xO égale à la réaction Y en C, on doit revenir au point de départ O.

Tout revient donc à connaître le point x qui est sur l'horizontale passant par p_3.

Prenons un pôle P et menons les rayons polaires connus 0, 1, 2, 3 ; le rayon 4 est inconnu.

Pour le trouver, nous appliquons la règle suivante :

Lorsqu'il y a une réaction inconnue en grandeur et en direction, on doit avoir soin de faire passer un côté connu du funiculaire qui doit y aboutir par le point d'application de cette réaction.

Donc, par le point C, menons une parallèle au rayon o, cette parallèle coupe P_1 en un point A_1, puis menons des parallèles aux rayons 1, 2, 3, ce qui nous donne A_1 A_2 A_3 K. Comme il faut que le funiculaire se ferme, le dernier côté est donc KC, ce qui donne le côté inconnu 4 du funiculaire.

Par le pôle P nous menons alors dans le dynamique une parallèle à ce rayon CK : elle coupe en x l'horizontale passant par p_3.

x étant déterminé, on a en p_3x la réaction X en A et en xO la réaction Y en B.

Remarque. — La force égale et directement opposée à la force X est la *traction* du corbeau sur le mur au point A.

La force opposée et égale à Y est la *poussée* du corbeau sur le mur en C.

126. *Fermes.* — On appelle *fermes*, en construction, des assemblages solides, placés suivant la largeur d'un édifice et destinés à soutenir la couverture.

Chaque ferme du comble (ensemble de la charpente supportant une toiture) se compose d'un certain nombre de pièces : de deux *arbalétriers* AB, AC, liés par un *tirant* ou *entrait* DE, lié lui-même au faîtage par un *poinçon* AF (fig. 73).

Soit P_1 le poids de couverture que porte l'arbalétrier AC, augmenté du poids de l'arbalétrier : ce poids est appliqué au milieu de AC, au point M. Soit P_3 l'ensemble du poids de couverture que porte l'arbalétrier AB, et du poids de cet arbalétrier, appliqué en N milieu de AB. Par symétrie on a $P_1 = P_3$. Soit P_2 le poids du tirant DE et du poinçon AF.

Les réactions X et Y en B et C sont égales, ver-

ticales, directement opposées aux forces et leur intensité est évidemment $\frac{P_1 + P_2 + P_3}{2}$.

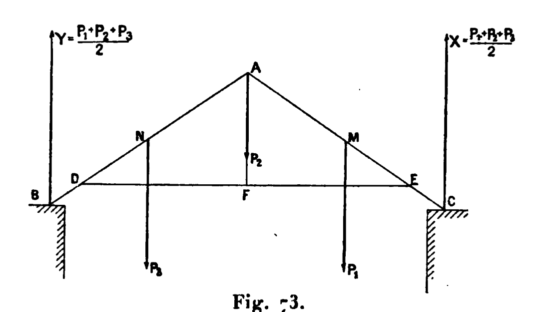


Fig. 73.

Pratiquement, on néglige ordinairement le poids propre de la ferme par rapport à celui qu'elle supporte.

127. ***Action du vent sur une toiture.*** — Lorsqu'un vent souffle sur une surface, il produit toujours sur elle une *pression qui lui est normale*, quelle que soit la direction dans laquelle il souffle. Cette pression est proportionnelle à la surface et au carré de la vitesse du vent.

La pression exercée par le vent contre une surface plane normale à sa direction est donnée par la formule pratique suivante :

$$P = 0{,}125\, \omega v^2, \qquad (1)$$

dans laquelle ω représente la surface *en mètres carrés*, v la vitesse du vent *en mètres par seconde* et P la pression *en kilogrammes*.

Si le vent frappe la surface considérée en faisant avec la normale à cette surface un certain angle α, il faut, dans la relation (1), remplacer v par $v \cos \alpha$ et

on a, pour la pression *normale*,

$$P = 0,125\, \omega\, v^2 \cos^2\alpha. \qquad (2)$$

Le vent ne souffle presque jamais horizontalement; mais généralement de haut en bas, en faisant avec l'horizon un angle de 10° (1).

Considérons, alors, une surface inclinée AB (fig. 74). Pour obtenir la pression normale produite par le vent, nous ferons la construction suivante : par le point O milieu de AB menons une horizon-

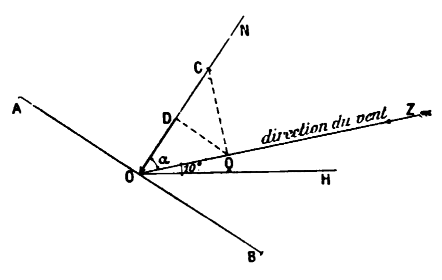


Fig. 74.

tale OH et soit OZ la direction du vent faisant un angle de 10° avec OH. Menons, au point O, la perpendiculaire ON à AB et soit α l'angle qu'elle fait avec la direction du vent : la pression du vent contre la surface AB est donnée par la relation (2).

Des tables donnent le produit

$$0,125\, v^2 = \pi$$

pour les différentes valeurs de la vitesse v du vent ; π c'est la pression par mètre carré de surface quand le vent souffle normalement à cette surface.

(1) Certains auteurs conseillent de supposer que le vent souffle horizontalement.

La pression totale que supporterait la surface AB si elle était normale à la direction du vent serait :

$$P_1 = \pi\omega,$$

qui est facile à calculer. Portons (fig. 74) une longueur égale à P_1 suivant la droite ON en OC, abaissons la perpendiculaire CQ sur la direction OZ et la perpendiculaire QD sur la droite ON ; la pression *normale* P exercée par le vent de direction OZ est donnée par DO mesurée à l'échelle.

En effet, le triangle rectangle OCQ donne

$$OQ = OC \cos\alpha = P_1 \cos\alpha\,;$$

le triangle rectangle ODQ donne :

$$OD = OQ \cos\alpha,$$

donc

$$OD = P_1 \cos^2\alpha,$$

et on a, par suite,

$$OD = \pi\omega \cos^2\alpha = 0{,}125\, v^2\ \omega \cos^2\alpha\,;$$

ce qui est bien la valeur fournie par la relation (2).

128. ***Ferme soumise à l'action du vent.*** — Soit une ferme ABCDE (fig. 75) ; soient P_1, P_3, les poids de couverture que portent les arbalétriers AC, AB augmentés des poids de ces arbalétriers, et soit P_2 le poids du tirant DE et du poinçon AF.

Supposons que le vent souffle de droite à gauche dans la direction MR en faisant avec l'horizon un angle de 10°.

Il produira une pression *normale*, sur le versant de droite, qui sera facile à construire en appliquant la construction que nous venons de donner (n° **127**).

Soit TM $= P_4$ cette pression appliquée au milieu M de AC.

Déterminons les réactions aux points B et C. Pour

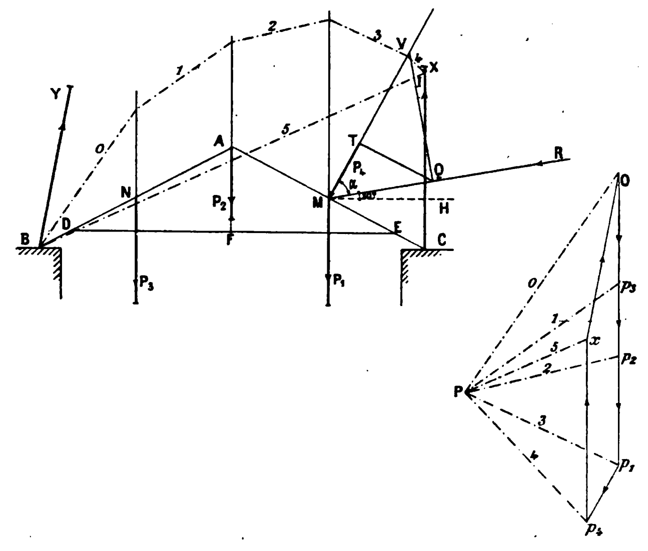


Fig. 75.

cela, admettons que la toiture soit *fixée* au point B et *repose* en C sur le mur de sorte qu'en ce point elle puisse glisser sans frottement.

La réaction en C est alors *verticale ;* mais *nous ne connaissons pas la direction de la réaction en B.*

Construisons le dynamique $Op_3\,p_2\,p_1\,p_4$; prenons un pôle P et menons les rayons polaires o, 1, 2, 3, 4. Puis traçons le funiculaire *en partant du point B* (n° **125**), et menons le rayon 4 jusqu'à sa rencontre en I avec la direction connue de la réaction en C.

Fermons le funiculaire en joignant I à B et la droite IB est le côté 5. Menons dans le dynamique un rayon 5 parallèle à IB et par le point p_4 une parallèle

à la direction de la réaction en C. Ces deux droites se coupent au point x et nous avons la réaction en C

$$X = p_4 x.$$

Comme il faut que le dynamique se ferme, menons xO et cette droite donne la réaction au point B *en grandeur et en direction :*

$$Y = xO.$$

Les *charges* sur les appuis sont égales respectivement à X et à Y et directement opposées.

On peut décomposer la réaction Y en deux forces, l'une verticale, l'autre horizontale qui tend à déplacer B : cet effort horizontal provient du vent.

§ 3. — Poutres horizontales. — Moments de flexion. — Efforts tranchants.

129. ***Définitions du moment de flexion et de l'effort tranchant.*** — Considérons une poutre horizontale AB (fig. 76) reposant sur deux appuis, soumise à un certain nombre de charges P_1, P_2, P_3, P_4, et aux réactions X et Y des extrémités (nº **122**).

Sous l'action de ces six forces la poutre est en équilibre.

Prenons un point quelconque M sur la poutre et faisons la réduction, au point M, de toutes les forces situées à gauche de ce point, nous obtenons ainsi une force R et un couple C dont le moment est égal à la somme algébrique des moments de toutes les forces situées à gauche de M. Faisons la même opération pour les forces situées à droite de M ; nous obtenons une force R′ et un couple C′ dont le moment

est égal à la somme algébrique des moments de toutes les forces situées à droite de M.

Puisque la poutre est en équilibre, les deux forces R et R′ sont égales et directement opposées ; les deux couples C et C′ s'équilibrent et, par conséquent, leurs moments sont égaux et de signes contraires.

L'intensité commune des forces égales R et R′ est ce qu'on appelle *l'effort tranchant*, au point M.

La valeur commune du moment des deux couples est *le moment de flexion*, au point M.

Ces dénominations s'expliquent aisément. En effet, la partie AM de la poutre est soumise à certaines forces que l'on peut supprimer à condition d'appliquer au point M la force R et le couple C que nous avons définis plus haut ; de même la partie BM de la poutre est soumise à certaines forces que l'on peut supprimer à condition d'appliquer au point M la force R′ et le couple C′. Si, par exemple, la force R est dirigée vers le haut, elle tend à soulever la portion AM, tandis que la force R′, directement opposée, tend à abaisser la partie BM. Les deux forces R et R′ tendent donc à *couper* la poutre en M d'où le nom d'*effort tranchant*.

Les deux couples C et C′, qui tournent en sens contraires, tendent à faire *fléchir* la poutre, car ils tendent à faire tourner les portions AM et BM dans des sens opposés autour de M. C'est ce qui explique le nom de *moment de flexion* ou *moment fléchissant* donné au moment commun de ces deux couples.

130. ***Poutre horizontale supportant des charges isolées.*** — DÉTERMINATION DE L'EFFORT TRANCHANT. — Soit la poutre AB posée sur deux appuis A et B,

soumise aux charges P_1, P_2, P_3, P_4, (fig. 76) et soient X et Y les deux réactions.

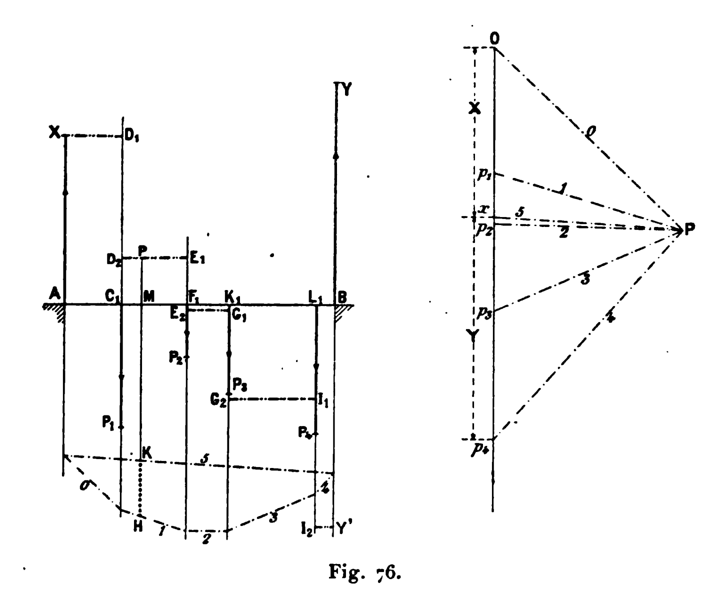


Fig. 76.

L'effort tranchant au point M est, comme nous l'avons vu, la résultante des forces qui agissent à gauche ou à droite du point M, à gauche par exemple. C'est donc la résultante des forces X et P_1 ; cette résultante est donnée sur le dynamique par la longueur p_1x.

Pour représenter graphiquement l'effort tranchant, imaginons qu'en chaque point M de la poutre on porte, sur la perpendiculaire à la poutre, une longueur MP égale à l'effort tranchant en ce point. Le lieu de P sera la *courbe des efforts tranchants*. Ici cette courbe se compose de portions de droites parallèles à la poutre car, entre deux forces consécutives P_1 et P_2 l'effort ne change pas. Dans

l'intervalle AC_1, l'effort tranchant est égal à la force X; menons donc par l'extrémité de la force X la droite XD_1 parallèle à AC_1. A partir de C_1, l'effort tranchant diminue de la force P_1 et il devient $X - P_1$; portons sur D_1C_1 à partir de D_1 une longueur $D_1D_2 = P_1$ et menons D_2E_1 parallèle à C_1F_1; la droite D_2E_1 est le lieu de P dans l'intervalle C_1F_1. A partir de F_1, l'effort tranchant diminue de P_2 et il devient $X - (P_1 + P_2)$; portons sur E_1F_1 à partir de E_1 une longueur $E_1E_2 = P_2$ et menons E_2G_1 parallèle à F_1K_1; et ainsi de suite dans les autres intervalles K_1L_1, L_1B.

On a un moyen de vérification de l'exactitude du graphique, car il faut que la dernière parallèle, qui donne l'effort tranchant dans le dernier intervalle, coupe BY en un point Y′ symétrique de Y par rapport au point B.

La courbe des efforts tranchants de la poutre est alors $XD_1\ D_2E_1\ E_2G_1\ G_2I_1\ I_2Y'$.

Cette figure étant tracée, pour avoir l'effort tranchant en un point quelconque M de la poutre, il suffit de mener par M une perpendiculaire à la poutre et la longueur MP, mesurée à l'échelle des forces, comprise entre la poutre et la courbe des efforts tranchants, donne l'effort tranchant au point M.

131. Détermination des moments de flexion. — Le moment fléchissant au point M est, d'après sa définition, la somme algébrique des moments de toutes les forces qui agissent à gauche ou à droite du point M, à gauche par exemple. C'est donc la somme algébrique des moments par rapport au point M des forces P_1 et X.

Pour avoir ce moment, il n'y a qu'à appliquer ce qui a été dit au n° **119**.

Menons par le point M (fig. 76) une parallèle à la direction des forces, elle coupe le rayon 1 du funiculaire en H et le rayon 5 en K ; HK *mesuré à l'échelle des moments* donne le moment de flexion de la pièce au point M.

D'où la règle suivante :

Pour trouver le moment de flexion en un point M quelconque, on mène par le point M une parallèle à la direction des forces, on prend la portion de cette parallèle située à l'intérieur du polygone funiculaire et on la mesure à l'échelle des moments.

132. Changement de pôle. — Dans certaines questions il y a avantage à ce que le côté de fermeture du funiculaire coïncide avec la poutre.

Ce résultat est facile à atteindre par un changement de pôle.

Considérons une poutre horizontale AB, posée sur deux appuis A et B (fig. 77) et soumise aux charges P_1, P_2, P_3.

Traçons le funiculaire 01234 en prenant comme pôle un pôle quelconque P aux environs du dynamique. Le rayon polaire 4 parallèle au côté 4 de fermeture du funiculaire coupe Op_3 au point x qui donne les deux réactions X et Y. Changeons de pôle.

Prenons un nouveau pôle Q situé sur une parallèle à AB menée par le point x et menons les nouveaux rayons polaires 0′ 1′ 2′ 3′ 4′. Faisons partir le funiculaire du point A ; il doit aboutir au point B si la construction est exacte, car 4′ étant parallèle à AB doit *coïncider* avec AB.

La courbe A 0′ 1′ 2′ 3′ B est alors ce qu'on appelle *la courbe des moments de flexion.*

Pour avoir le moment de flexion en un point M il

suffit alors de mener l'ordonnée MM′ et de mesurer la longueur MM′ à l'échelle des moments.

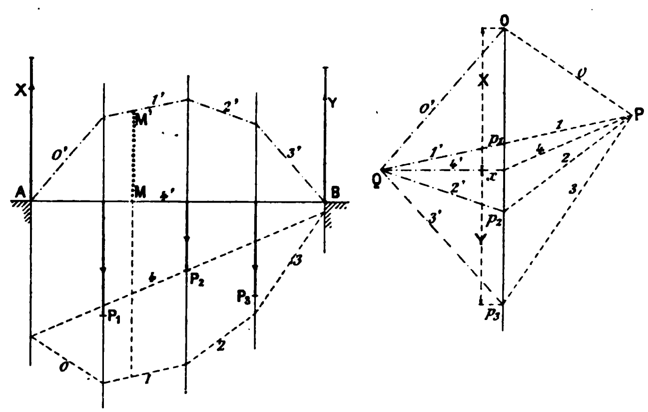


Fig. 77.

133. ***Poutre horizontale supportant une charge uniformément répartie.*** — Considérons une poutre horizontale AB (fig. 78) posée sur deux appuis A et B et uniformément chargée d'une charge constante p par unité de longueur. Si l est la longueur de la poutre la charge totale sera

$$pl = P.$$

Il est évident qu'à cause de la symétrie, les réactions aux points d'appui sont égales chacune à la demie charge totale. On a donc

$$X = Y = \frac{P}{2}.$$

134. DÉTERMINATION DES MOMENTS DE FLEXION. — Partageons la droite AB en un nombre pair $2n$ de

parties égales ; chaque partie supporte un poids égal à $\frac{P}{2n}$ puisqu'il y en a $2n$. Marquons ces poids partiels $\frac{P}{2n}$ appliqués aux milieux de chaque partie.

On est alors ramené à la question précédente : une poutre soumise à des charges isolées $\frac{P}{2n}$; et on peut construire la courbe des moments de flexion. A cet

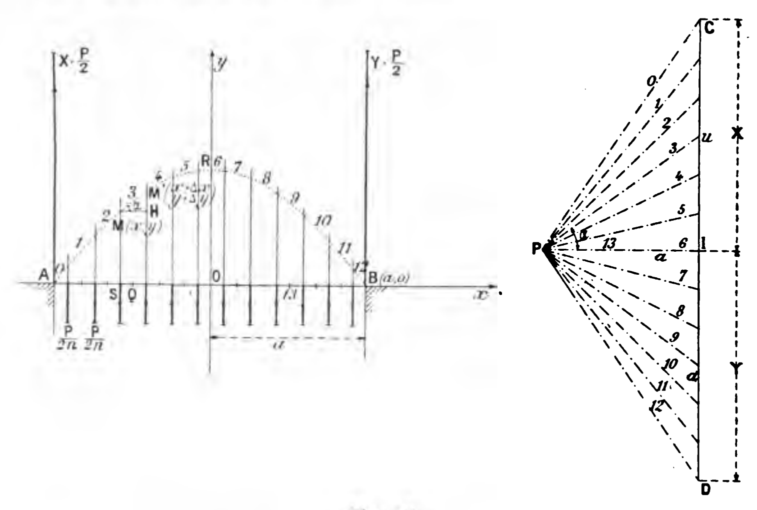


Fig. 78.

effet, menons $CD = P$ parallèle aux forces et prenons le milieu I de CD on a évidemment $DI = Y$ et $IC = X$. Menons au point I une parallèle à AB et prenons sur cette parallèle un pôle P tel que l'on ait : $PI = \frac{AB}{2} = a$.

Pour mener les rayons polaires, divisons CD en $2n$ parties égales, et joignons les points de divisions

ainsi obtenus au point P. Chacune de ces divisions est égale à une force partielle $\frac{P}{2n}$.

Faisons partir le funiculaire du point A ; il doit aboutir au point B si la construction est exacte.

Mais, en agissant ainsi, nous avons supposé que chaque portion en lesquelles nous avons partagée la poutre AB supportait une charge isolée $\frac{P}{2n}$. Pour passer au cas d'une charge continue, il faut imaginer que l'on fasse croître n, et chercher ce qui se passe à la limite, quand n croît indéfiniment. On est donc amené à chercher ce que devient le polygone ARB des moments de flexion quand n croît indéfiniment.

Pour cela, prenons deux axes rectangulaires, l'un Ox coïncidant avec AB, l'autre Oy perpendiculaire au milieu O de AB.

Nous allons montrer que la limite du contour polygonal des moments, lorsque le nombre $2n$ des côtés croît indéfiniment est une parabole dont l'axe est Oy.

En effet, prenons un côté quelconque MM′ du polygone. Les coordonnées du point M étant x, y, quand on passe du point M au point M′ les coordonnées augmentent l'une de Δx et l'autre de Δy.

Soit α l'angle que fait la droite MM′ avec l'axe Ox et menons MH parallèle à AB. Le triangle rectangle MM′H donne :

$$tg\,\alpha = \frac{M'H}{MH} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

La droite MM′ du funiculaire (notée 3), est parallèle au rayon polaire Pu (noté 3) et par conséquent Pu fait avec PI l'angle α.

Le triangle rectangle PIu donne :

$$tg\,\alpha = \frac{uI}{PI}. \qquad (2)$$

Or, la longueur uI est égale à un certain nombre de fois la force $\frac{P}{2n}$, soit par exemple q fois. On a donc

$$uI = q\frac{P}{2n} = \frac{q}{n}.\frac{P}{2}.$$

D'ailleurs

$$PI = \frac{AB}{2} = OB = a,$$

a étant la longueur de la moitié de la barre AB.

L'égalité (2) s'écrit alors

$$tg\,\alpha = \frac{q}{n}.\frac{P}{2a}. \qquad (3)$$

Égalons les deux valeurs de $tg\,\alpha$ données par (1) et (3), il vient :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{q}{n}.\frac{P}{2a}. \qquad (4)$$

Ceci posé, évaluons le rapport $\frac{q}{n}$ en fonction de x.

Soit Q le milieu de la division qui correspond à MM′, quand on va du point O au point Q on trouve autant de divisions que quand on va de u en I. Donc de O en Q il y a q divisions.

La poutre AB ayant une longueur $2a$ et étant divisée en $2n$ parties, chaque division est égale à $\frac{a}{n}$ et par conséquent OQ, qui a q divisions, est égal à $q.\frac{a}{n}$ ou

$$OQ = \frac{q}{n}a. \qquad (5)$$

Mais on a, sur la figure,

$$OQ = OS - SQ;$$

OS est la valeur absolue $(-x)$ de l'abscisse du point M et SQ est la moitié de l'accroissement Δx, quand on passe de M en M', on a donc

$$OQ = -x - \frac{\Delta x}{2}. \qquad (6)$$

En égalant les deux valeurs de OQ données par (6) et (5) on a

$$\frac{q}{n} a = -x - \frac{\Delta x}{2},$$

d'où

$$\frac{q}{n} = -\frac{x + \frac{\Delta x}{2}}{a};$$

et l'égalité (4) devient, finalement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{P}{2a^2}.$$

Faisons croître n indéfiniment : chaque division de la poutre tend vers zéro, donc Δx tend vers zéro.

La limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quand Δx tend vers zéro, est la dérivée de y par rapport à x, on a donc, à la limite,

$$\frac{dy}{dx} = -x \frac{P}{2a^2}.$$

Remontons à la fonction primitive pour avoir

l'équation de la courbe, et il vient :

$$y = \int - x \frac{P}{2a^2} dx,$$

$$y = - \frac{x^2}{2} \frac{P}{2a^2} + C. \qquad (7)$$

Il reste à trouver la constante d'intégration C.

Or la courbe en question passe par B, donc si on fait $x = a$ on doit trouver $y = 0$ et, par suite, on a

$$0 = - \frac{a^2}{2} \frac{P}{2a^2} + C.$$

On tire de là la valeur de la constante qui est :

$$C = \frac{P}{4}.$$

Cette valeur portée dans (7) donne l'équation de la courbe des moments fléchissants

$$y = \frac{P}{4} - \frac{P}{4a^2} x^2.$$

C'est l'équation d'une parabole à axe vertical.

Cette parabole passe aux deux points A et B ; son sommet est situé sur l'axe des y, et nous aurons son ordonnée en faisant $x = 0$ ce qui donne :

$$y = \frac{P}{4}.$$

Le sommet C est donc obtenu en prenant $OC = \frac{X}{2}$ ou ce qui revient au même, en menant la diagonale XB du parallélogramme ABYX et prenant son inter-

section avec Oy. La parabole est déterminée puisqu'on connaît deux points A et B et le sommet C (fig. 79).

Donc, *étant donnée une poutre horizontale AB qui supporte une charge totale P uniformément répartie tout le long de la poutre, si on prend une distance polaire égale à la moitié de la poutre, la courbe des moments de flexion est une parabole passant par les points d'appui A et B et dont la flèche (ou l'ordonnée au sommet) est égale au quart de la charge totale mesurée à l'échelle des forces.*

On a donc la parabole des moments de flexion par la construction suivante :

On porte en A et B (fig. 79) les réactions X et Y égales chacune à $\frac{P}{2}$ et sur Oy on prend $OC = \frac{P}{4}$; on a le sommet C de la parabole.

Les tangentes en A et B sont faciles à tracer : on mène la droite XY qui coupe l'axe Oy au point D, on joint D aux points A et B et les deux tangentes sont AD, BD ; car la sous-tangente OD est double de l'abscisse OC.

Le foyer F se détermine en menant du sommet C une parallèle à AB et, au point de rencontre T avec AD, une perpendiculaire à AD ; le point où cette perpendiculaire TF rencontre Oy donne le foyer F de la parabole, car la projection du foyer F sur une tangente AD est située sur la tangente au sommet TC. La directrice est la droite D'D'' qui passe par le point D_1 symétrique de F par rapport au sommet C.

Cette courbe étant tracée, pour avoir le moment de flexion en un point M quelconque, on mène (fig. 79) MM' perpendiculaire à AB au point M et on mesure à l'échelle des moments la longueur MM' comprise entre la courbe ACB et la poutre AB; ou, si l'on n'a pas d'échelle des moments on mesure MM' à l'échelle des forces et on multiplie le nombre trouvé par la demie longueur de la poutre.

135. Détermination des efforts tranchants. — *La courbe des efforts tranchants est la droite qui joint le milieu de la poutre à l'une des extrémités des deux réactions.*

En effet, prenons un point quelconque M sur la

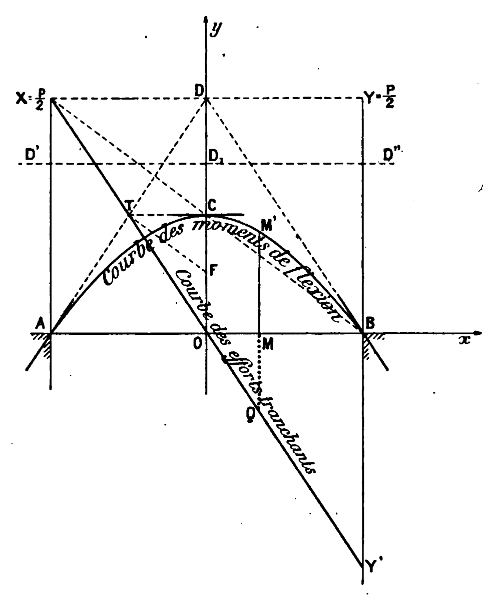


Fig. 79.

poutre (fig. 79), l'effort tranchant en M est la résultante des forces situées à droite ou à gauche de M : prenons, par exemple, celles de droite. On a alors la réaction $Y = \frac{P}{2}$, et la charge supportée par la portion BM de la poutre; soit x cette charge inconnue. Elle est proportionnelle à MB et on a

$$\frac{x}{MB} = \frac{P}{AB}$$

d'où on tire l'inconnue x :

$$x = P \frac{MB}{AB}.$$

L'effort tranchant au point M est donc

$$\frac{P}{2} - x = \frac{P}{2} - P\frac{MB}{AB} = \frac{P}{AB}\left(\frac{AB}{2} - MB\right)$$
$$= \frac{P}{AB}\left(OB - MB\right) = P\frac{OM}{AB} = \frac{P}{2}\frac{OM}{OB},$$

car

$$AB = 2OB.$$

Menons MQ perpendiculaire à AB : si nous prouvons que MQ mesurée à l'échelle des forces est égal à $\frac{P}{2}\frac{OM}{OB}$, nous aurons prouvé que XOY′ est bien la courbe des efforts tranchants. Considérons les deux triangles semblables OQM et OBY′ on a

$$\frac{MQ}{BY'} = \frac{OM}{OB}$$

ou (n° **116**)

$$\left(\frac{MQ}{BY'}\right)_f = \left(\frac{OM}{OB}\right)_l,$$

$$\frac{(MQ)_f}{\frac{P}{2}} = \left(\frac{OM}{OB}\right)_l.$$

On tire de là

$$(MQ)_f = \frac{P}{2} \cdot \frac{OM}{OB}.$$

MQ mesurée à l'échelle des forces est donc bien l'effort tranchant du point M, ce qu'il fallait démontrer.

136. *Poutre horizontale supportant à la fois une charge uniformément répartie et des charges isolées.* — DÉTERMINATION DES MOMENTS DE FLEXION. — Soit p le poids par unité de longueur de la charge continue, si $2a$ est la distance entre les deux appuis A et B de la poutre (fig. 80), la charge totale est $2pa = P$. Cette charge uniforme donne pour courbe des moments de flexion (n° **134**) une parabole ACB.

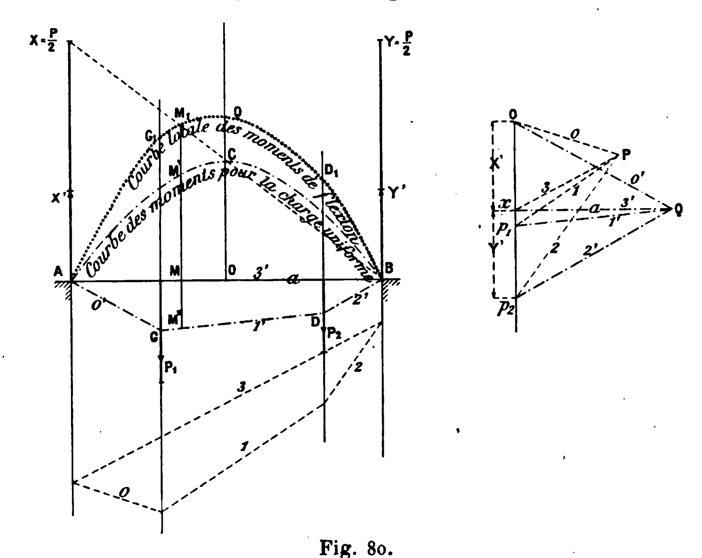


Fig. 80.

Aux charges isolées P_1, P_2 correspond la courbe des moments de flexion A0′1′2′B obtenue par un changement de pôle (n° **132**).

Le moment total de flexion s'obtient en additionnant les ordonnées des deux courbes obtenues. Ainsi, pour avoir le moment de flexion au point M il suffit de mener par M une perpendiculaire à la poutre AB et de mesurer à l'échelle des moments la distance M′M″ comprise entre les deux courbes.

Quelquefois on préfère construire la courbe obtenue en ajoutant les ordonnées au-dessus de AB; on reporte, par exemple, la distance MM″ au-dessus de M′ en $M'M_1$ et on fait de même pour tous les points de AB, on obtient un contour AQB qui est *la courbe des moments de flexion.*

Nous allons prouver que les arcs de courbe AC_1, C_1D_1, D_1B, dont elle se compose, sont des arcs de parabole.

En effet, pour obtenir le point M_1, par exemple, on a augmenté l'ordonnée MM′ de la quantité $M'M_1$ égale à MM″, on a donc augmenté l'ordonnée de la parabole ACB de l'ordonnée de la droite DC.

L'équation de la parabole ACB est de la forme :

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

et celle de la droite DC

$$y = mx + n. \qquad (2)$$

Ajoutons les deux ordonnées et nous obtenons pour l'ordonnée totale, somme des ordonnées (1) et (2),

$$y = ax^2 + (b + m)\,x + c + n. \qquad (3)$$

Donc, la nouvelle courbe, dont l'ordonnée y est une fonction du second degré en x, est encore une parabole.

Le lieu géométrique du point M_1 se compose donc d'arcs de paraboles.

Cette courbe étant tracée, pour avoir le moment de flexion au point M il suffit de mener MM_1 perpendiculaire à AB en M et de mesurer la longueur MM_1 comprise entre la courbe et la droite AB, à l'échelle des moments.

137. Détermination des efforts tranchants. — La charge uniforme donne pour courbe représentative des efforts tranchants (fig. 81) la droite XOY_1 (n° **135**).

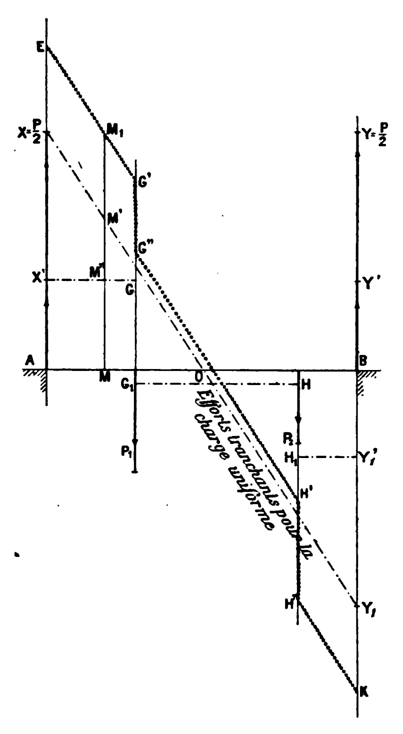


Fig. 81.

Aux charges isolées P_1, P_2 correspond la courbe des efforts tranchants $X'GG_1HH_1Y'_1$ (n° **130**).

L'effort tranchant total s'obtiendra en additionnant les ordonnées des deux courbes, il sera donc représenté par le contour $EG'G''H'H''K$.

Pour avoir, par exemple, l'effort tranchant au point M, on mène MM_1, perpendiculaire à la poutre

AB et on mesure MM_1 à l'échelle des forces; ou, si l'on n'a pas tracé la courbe résultante, on mesure $(MM' + MM'')$.

§ 4. — Systèmes triangulés.

138. ***Description générale. — Réduction des forces extérieures à des forces appliquées aux nœuds.*** — Les systèmes triangulés se composent de pièces droites réunies à leurs points de rencontre par des articulations, c'est-à-dire par des assemblages qui ne s'opposent pas à la déformation des angles; on applique, par extension, les résultats trouvés pour ces systèmes à des ouvrages en charpente, quoique leurs assemblages ne répondent pas rigoureusement à cette définition.

On dit qu'un système articulé présente des barres *surabondantes* si la suppression de certaines barres n'altérerait pas la rigidité du système. Ces barres seraient théoriquement inutiles.

Nous n'examinerons que des cas où il n'y a pas de barres surabondantes.

Le point de rencontre de deux ou plusieurs barres est appelé un *nœud*.

Un système articulé est soumis à un certain nombre de forces extérieures; ces forces sont de deux catégories : les *charges* données et les *réactions* aux points d'appui.

Il est de règle dans un système articulé de n'appliquer jamais de charges isolées autre part qu'en des nœuds; ce qui fait que les tiges ne subissent que des efforts dirigés dans le sens de leur longueur.

Le système articulé peut supporter, par l'intermédiaire de pannes reposant sur deux nœuds, des charges

uniformément réparties distribuées sur des barres; soit P la résultante de ces charges uniformément réparties sur une barre, elle est appliquée au milieu de la barre et on peut la décomposer en deux forces appliquées aux deux extrémités A et B de la barre; ces deux forces seront égales entre elles et auront pour valeur $\frac{P}{2}$, la moitié de la charge totale.

En fait, les charges uniformément réparties ne sont jamais appliquées sur les barres elles-mêmes, mais sur des panneaux parallèles aux barres très voisines et reposant par leurs extrémités sur des nœuds. Dans ces conditions on voit bien, alors, que chacune de ces charges n'agit sur le système que par les nœuds.

Donc, *chaque fois qu'une barre d'un système triangulé supporte une charge P uniformément répartie, chaque extrémité de la barre, c'est-à-dire chaque nœud, supporte la demi-charge.*

En résumé, *étant donné un système triangulé, soumis à des forces extérieures, les charges et les réactions, qui se font équilibre, on devra toujours remplacer ce système de forces par un système de forces appliquées en des nœuds en observant que chaque nœud supporte, outre les charges isolées et les réactions qui peuvent lui être appliquées, les demi-charges uniformément réparties sur toutes les barres qui y aboutissent.*

139. ***Tensions des barres.*** — Considérons un système articulé de forme quelconque ABCDE (fig. 82, p. 142) et soumis à un certain nombre de forces se faisant équilibre, trois par exemple : la force P appliquée au nœud A, la force Q appliquée au nœud B, la force R appliquée au nœud C. Comme les forces P,

Q,R se font équilibre, leur dynamique doit se fermer; si donc on donne les directions et les intensités des forces P et Q la direction et l'intensité de la force R seront données par la condition que le dynamique *p q r* se ferme (fig. 82) et, de plus, les trois forces sont concourantes.

Ceci posé, chaque nœud est soumis à un certain nombre de forces qui sont les forces extérieures et les réactions des barres sur ce nœud. Le nœud est en équilibre sous l'influence des forces qui agissent sur lui, car ce nœud peut être considéré comme un corps solide (un boulon par exemple) soumis à des forces extérieures et aux actions des barres qui y aboutissent.

Donc : *Toutes les forces qui agissent sur un nœud se font équilibre, et par conséquent le dynamique de ces forces se ferme.*

Chaque barre agit sur le nœud correspondant et réciproquement chaque nœud réagit sur la barre correspondante; il en résulte que chaque barre est soumise à deux forces qui agissent à ses deux extrémités. Comme la barre est en équilibre, il faut que ces deux forces soient égales, directement opposées et dirigées suivant la direction de la barre.

Donc, *chaque barre est soumise à deux forces égales, directement opposées et appliquées à ses extrémités. L'intensité commune de ces deux forces est ce qu'on appelle la* TENSION *de la barre.*

Deux cas peuvent se présenter :

1° Les deux forces qui agissent aux extrémités de la barre sont dirigées de façon à écarter les deux extrémités, on dit alors que la barre *travaille à la traction*. Les deux nœuds tirent sur la barre aux deux extrémités.

2° Les deux forces sont dirigées de façon à rapprocher les deux extrémités, on dit, dans ce cas, que la barre *travaille à la compression*. La barre est comprimée; les deux nœuds tendent à se rapprocher.

140. Remarque. — *En un nœud où n'aboutissent que deux barres doit être appliquée une force extérieure, sinon les deux barres sont inutiles.*

En effet, supposons qu'au nœud A (fig. 82) ne soit appliquée aucune force extérieure, alors les tensions des barres AD, AE sont nulles, car si ces tensions n'étaient pas nulles on aurait au point A une force dirigée suivant AD et une force dirigée suivant AE; et ces deux forces devraient se faire équilibre, ce qui est impossible puisqu'elles ne sont pas directement opposées. Les tensions des deux barres sont donc nulles et les deux barres sont inutiles, on peut les supprimer dans le système.

Nous supposerons, dans la suite, chaque fois qu'en un nœud n'aboutiront que deux barres, qu'il y a une force extérieure appliquée en ce nœud.

141. ***Détermination graphique des tensions des barres.*** — Etant donné un système triangulé en équilibre, nous nous proposons de déterminer par la méthode graphique les tensions de toutes les barres du système et de reconnaître si les barres travaillent à la traction ou à la compression.

Considérons (fig. 82) un système articulé soumis à trois forces P, Q, R concourantes qui se font équilibre .Partons du nœud A où aboutissent deux barres AD, AE et où agit la force extérieure P.

Les deux tensions suivant AD et AE sont deux forces inconnues en intensité, mais connues en direction qui doivent faire équilibre à la force P.

Construisons le dynamique : il suffit de construire un triangle dont on connaît un côté qui a pour longueur P et les directions AD et AE des deux autres côtés ; ce triangle est déterminé, soit FGH.

Les forces HG et FH de ce dynamique font équilibre à la force P appliquée au nœud A ; ces forces sont donc les réactions des barres sur le nœud A et les forces égales et directement opposées sont les tensions des barres au point A suivant AD et AE. Soient T et U ces tensions ; on a $T = GH$ et $U = HF$.

Au point D est appliquée une force T′ égale et directement opposée à T de même en E une force U′ égale et directement opposée à U.

Au nœud D aboutissent trois barres, AD, DE, DC. On connaît la tension T′ de la barre AD, et les directions des tensions inconnues des barres DE, DC. On est donc ramené au problème précédent. Les tensions inconnues doivent faire équilibre à la force T′. Construisons un nouveau dynamique; pour cela menons G_1H_1 égal et parallèle à T et par les extrémités de G_1H_1, G_1 I parallèle à DC et H_1 I parallèle à DE. Les forces G_1 I, I H_1 de ce dynamique font équilibre à la force T, ce sont les tensions S et V des barres suivant DE, DC.

Au point C est appliquée une force V′ égale et directement opposée à V, de même en E une force S′ égale et directement opposée à S.

Au nœud C agit la force extérieure R, la force égale et directement opposée à la tension V′ et les réactions inconnues des barres CE et CB mais dont on connaît les directions. Construisons le dynamique, menons LG_2 égal et parallèle à la force R et G_2 I_1 égal et parallèle à V, puis par l'extrémité I_1 menons I_1K parallèle à CE et par l'extrémité L, LK parallèle

à CB, les forces I_1K et LK sont les tensions des barres CE et CB.

On voit que pour chaque nœud correspond un dynamique particulier qui donne les tensions des barres qui y aboutissent.

En suivant la même marche, on trouverait le dyna-

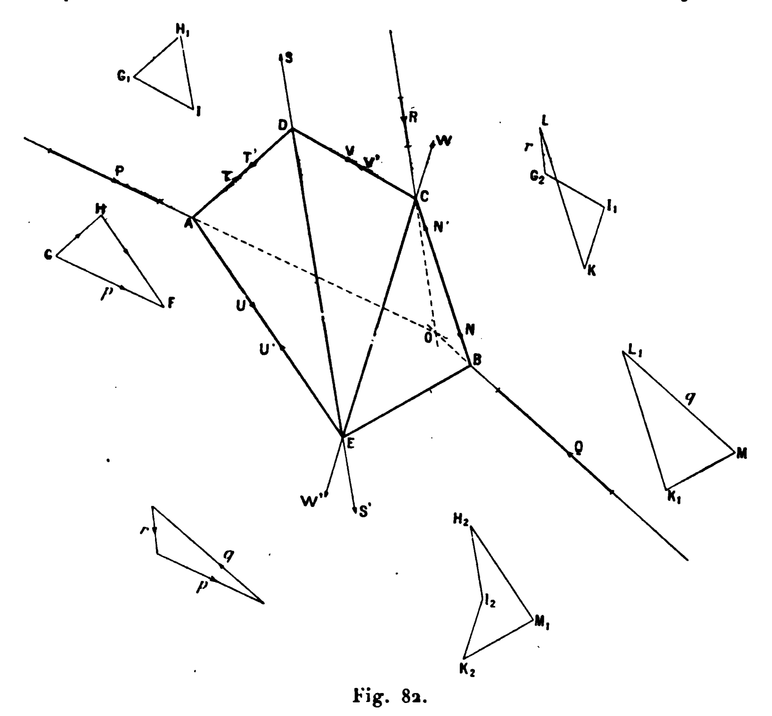


Fig. 82.

mique au point B : $K_1 L_1 M$, qui donne la tension MK_1 de la barre BE et le dynamique au point E : $M_1K_2I_2H_2$, qui donne les tensions déjà connues des barres qui aboutissent au nœud E.

142. ***Réunion des dynamiques partiels en un seul.*** — Dans la pratique, on évite le tracé d'un grand

nombre de lignes en réunissant ces dynamiques particuliers. Ainsi on réunit les dynamiques des points A et D (fig. 82)en plaçant la droite $G_1 H_1$ sur la droite égale et parallèle GH; on transporte le dynamique du point C parallèlement à lui-même de manière que le point G_2 coïncide avec le point G, alors la droite

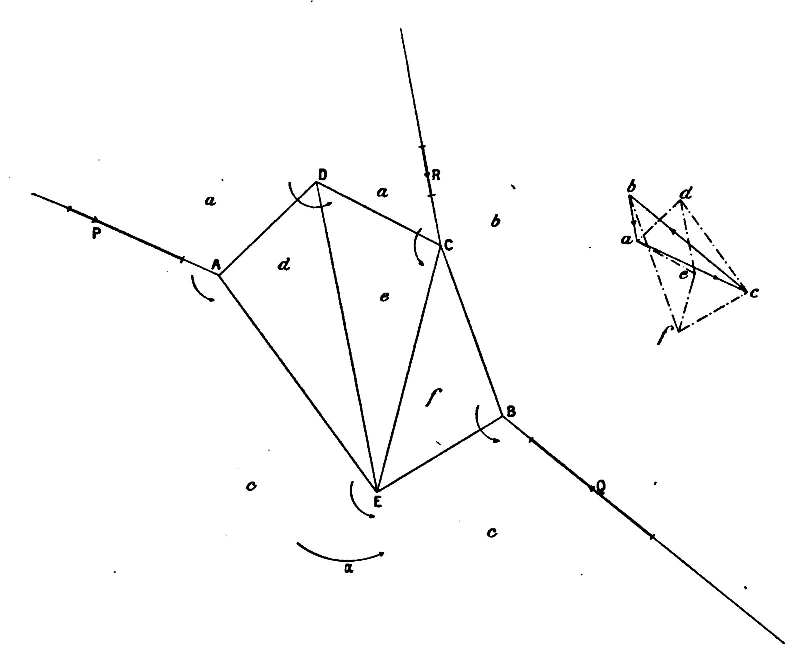


Fig. 83.

$G_2 I_1$ coïncide avec G_1 I du second dynamique transporté; puis on transporte le dynamique du point B parallèlement à lui-même de manière que L_1 K_1 coïncide avec la nouvelle position de la droite LK transportée du troisième dynamique; le dynamique du point E se trouve tout transporté.

On voit que l'on économise ainsi un certain nombre de lignes.

143. ***Notation des aires.*** — Pour faciliter le tracé du dynamique unique obtenu par la réunion des dynamiques partiels, il est bon d'adopter une notation particulière dite *notation des aires*.

Considérons la figure formée par un système articulé et des forces extérieures. Si l'on imagine que les lignes qui forment les forces sont prolongées indéfiniment et *extérieurement* au système articulé, on découpe la feuille de l'épure en régions. Dans chaque région on met une lettre; soient *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*...

Au moyen de cette notation, chaque force connue ou inconnue est dirigée suivant une ligne qui sépare deux régions.

Dans le dynamique, on met aux deux extrémités de la force les mêmes lettres que celles qui sont placées dans les deux aires contiguës à cette force, dans le système articulé.

Ainsi, la force P (fig. 83) sépare les aires *a* et *c*, on nommera donc dans le dynamique la force parallèle à P par *ac* ; la tension de la barre AE sépare les aires *c* et *d*, on représentera cette tension dans le dynamique par *cd*.

144. ***Tracé du dynamique unique.*** — Cette notation adoptée, reprenons le tracé précédent, en réunissant tous les dynamiques partiels en un seul.

Pour régulariser la marche adoptons un sens de rotation, celui de la flèche α par exemple, et prenons, dans le tracé du dynamique partiel de chaque nœud, les forces dans l'ordre où on les rencontre en tournant autour du nœud dans le sens α (fig. 83).

Partons du nœud A où aboutissent deux barres AD, AE et où agit la force extérieure P. Les deux tensions *dc* et *ad* suivant AE et AD sont inconnues en intensité mais connues en direction. Imaginons que l'on tourne autour du nœud A dans le sens de la flèche α. On va de l'aire *a* à l'aire *c* en traversant la force P, on mène dans le dynamique une parallèle à P et on porte sur cette parallèle une longueur *ac* égale P et de même sens. Puis, on passe de l'aire *c* à l'aire *d* en traversant AE, par le point *c* on mène une parallèle à AE ; enfin on revient de l'aire *d* à l'aire *a* en traversant AD ; par le point *a* on mène une parallèle à AD. Les deux droites ainsi menées, dans le dynamique, se coupent en un point *d* et les deux tensions cherchées sont, *en grandeur*, *ad* pour la barre AD et *ac* pour la barre AE. Si l'on se reporte à la figure 82, on voit que le dynamique *acd* que nous venons de tracer n'est pas autre chose que le dynamique GHF. Nous ne nous occuperons pas, pour le moment, des sens des tensions, mais seulement de leurs grandeurs.

Passons au nœud D. En ce nœud aboutissent trois barres ; on connaît la tension *ad* de la barre AD et les directions des tensions inconnues des deux barres DE, DC. Imaginons que l'on tourne autour du nœud D dans le sens de la flèche α. On va de l'aire *a* à l'aire *d* en traversant AD, on mène dans le dynamique par le point *a* une parallèle à AD ; cette parallèle *ad est déjà menée*. Puis on va de l'aire *d* à l'aire *e* en traversant DE, par le point *d* on mène une parallèle à DE ; enfin on va de l'aire *e* à l'aire *a* en traversant DC, par le point *a* on mène une parallèle à DC. Les deux droites ainsi menées, dans le dynamique, se coupent en un point *e* et les deux tensions

cherchées sont *de* pour la barre DE et *ea* pour la barre DC.

Si l'on se reporte à la figure 82, on voit que le dynamique *ade* n'est autre que le dynamique G_1H_1I.

Passons au nœud C où aboutissent trois barres et où agit la force extérieure R. On connaît la tension *ea* de la barre DC et les directions des tensions des barres CE, CB ; déterminons les intensités de ces deux tensions. Tournons autour du nœud C dans le sens de la flèche α : on va de l'aire *b* à l'aire *a* en traversant la force R, menons par *a* une parallèle à la force R et telle que *ba* soit égale à R et de même sens. Puis on va de l'aire *a* à l'aire *e* en traversant CD, menons par *a* une parallèle à CD, c'est la droite *ae déjà menée*. Puis on va de l'aire *e* à l'aire *f* en traversant CE; menons par *e* une parallèle à CE. Enfin on va de l'aire *f* à l'aire *b* en traversant CB; menons par *b* une parallèle à CB. Les deux dernières droites ainsi menées se coupent en un point *f* et les deux tensions cherchées sont *ef* pour la barre CE et *bf* pour la barre CB.

Si l'on se reporte à la figure 82, on voit que le dynamique *baef* n'est pas autre chose que le dynamique LG_2I_1K.

Passons ensuite au nœud B où aboutissent deux barres et où agit la force extérieure Q. On connaît la tension *fb* de la barre BC, il reste à trouver la tension connue en direction sur la barre BE.

En tournant dans le sens de la flèche α on passe de l'aire *c* à l'aire *b* en traversant la force Q; par le point *c* menons une parallèle à Q, cette droite doit passer par le point *b* déjà obtenu et de plus *cb* doit être égal à Q et de même sens. Puis on passe de l'aire *b* à l'aire *f* en traversant BC, menons par *b* la

parallèle *bf* à BC; cette parallèle *est déjà menée.* On passe de l'aire *f* à l'aire *c* en traversant BE: menons par *f* une parallèle à BE, cette droite doit passer par le point *c*; c'est une *vérification*. *fc* donne la tension de la barre EB.

Le dynamique *bfc* n'est autre chose que le dynamique L_1K_1M.

Les tensions de toutes les barres sont déterminées.

145. *Règle générale à suivre pour le tracé du dynamique.* — *Étant donné un système articulé, lorsqu'on a déterminé toutes les forces extérieures qui agissent sur les nœuds de ce système, à savoir les charges et les réactions, qui forment un système en équilibre, on imagine que les lignes d'action des forces extérieures soient prolongées indéfiniment en dehors du système articulé. On partage ainsi la feuille en un certain nombre de surfaces et dans chaque surface on met une lettre.*

On adopte un sens de rotation et on imagine que l'on tourne autour du système articulé dans ce sens. On construit le dynamique des forces extérieures dans l'ordre où on les rencontre en tournant dans le sens choisi et en ayant soin, dans ce dynamique, de désigner une force par les deux lettres des deux surfaces qu'elle sépare.

Ceci fait, on part d'un nœud où n'aboutissent que deux barres, en ce nœud il y a nécessairement une force extérieure (*n°* **140**)*. On tourne dans le sens choisi autour du nœud et dans le même sens sur le dynamique. On a une première force tracée dans le dynamique qui est la force qui aboutit à ce nœud. Chaque fois que l'on passe d'une aire dans la sui-*

vante, on mène dans le dynamique, par le point où l'on se trouve, une parallèle à la ligne qu'on traverse dans le système articulé, et il faut revenir au point de départ.

Ayant construit le dynamique relatif au premier point, on passe de ce nœud à un suivant où il y a deux tensions inconnues.

Une portion du dynamique partiel de ce second nœud est déjà tracée. On imagine toujours que l'on tourne autour de lui dans le sens adopté et chaque fois qu'on traverse une ligne de séparation de deux aires, dans le système, on doit tracer une parallèle à cette ligne, dans le dynamique, qui portera à ses deux extrémités les lettres qui désignent les aires.

Pour le dernier nœud, le dynamique est construit par les opérations précédentes.

Si dans une barre la tension est nulle, il y a deux points qui coïncident et on met deux fois la même lettre.

Les tracés obtenus par l'application de la méthode précédente donnent lieu à des observations intéressantes.

Si on considère les deux figures formées d'une part par les barres du système articulé et les lignes d'action des forces extérieures, d'autre part par le dynamique, ces deux figures jouissent, l'un par rapport à l'autre, des propriétés suivantes :

1° A chaque ligne d'une des figures correspond dans l'autre une ligne parallèle, et réciproquement ;

2° A toutes les lignes de l'une des figures qui aboutissent en un même point correspondent dans l'autre figure, des lignes parallèles formant un contour polygonal.

Il y a réciprocité entre les deux figures ; c'est pour cela qu'elles ont été nommées par Cremona *figures réciproques*.

Ainsi aux quatre lignes aboutissant dans la figure 83 au nœud C correspondent les quatre lignes parallèles du dynamique formant le *polygone bacf*. Avec la notation des aires, *le polygone baef porte à ses sommets les mêmes lettres que les aires qui aboutissent au nœud C et dans le même ordre*.

De la construction même, telle qu'elle résulte de l'application de la Règle précédente, il résulte bien que chaque dynamique partiel

relatif à un nœud donne des forces en équilibre respectivement parallèles aux barres et aux forces extérieures. Pour que la construction soit pleinement justifiée, il reste à se convaincre que les *sens* des forces sont bien observés. Or, ceci résulte des trois remarques suivantes :

1° Le dynamique des forces extérieures a été tracé en tenant compte du sens de ces forces.

2° Lorsqu'on tourne dans le sens α autour d'un nœud où aboutit une force extérieure on traverse les aires contigües à cette force dans le même ordre que lorsqu'on tourne autour de tout le système dans le sens α. La force extérieure a donc bien, dans le dynamique partiel, son sens.

3° Lorsqu'on tourne dans le sens α, successivement, autour des deux nœuds qui sont les extrémités d'une même barre, les aires contigües à cette barre sont traversées, dans les deux cas, en ordre inverse. Il en résulte que, dans les deux dynamiques partiels, le côté commun qui donne la tension de la barre est parcouru, successivement, dans deux sens différents. Les actions de la barre sur les deux nœuds sont donc bien prises en sens contraires.

146. ***Distinction des tractions et des compressions.*** — Il reste maintenant à reconnaître si on a affaire à une compression ou à une traction dans chacune des barres du système.

Or, de la façon dont nous avons fait le tracé du dynamique, si un mobile tourne autour d'un nœud dans le sens adopté, le mobile correspondant qui décrit le dynamique partiel de ce nœud dans l'ordre des lettres des aires traversées par le premier, décrit en grandeur *et en direction* les forces qui agissent *sur ce nœud.* Pour avoir, alors, au contraire, les actions de ce nœud *sur les barres* qui y aboutissent il faut changer les sens précédents.

Ceci conduit à la règle suivante :

147. Règle. — *Pour avoir les sens des actions d'un nœud quelconque sur les barres qui y aboutissent on considère le dynamique partiel relatif à ce nœud. On imagine qu'un premier mobile tourne autour du*

nœud dans le sens CONTRAIRE *au sens adopté et qu'un second mobile décrive le dynamique partiel du nœud dans l'ordre des lettres des aires traversées par le premier.*

Le sens de marche de ce second mobile donne les sens des actions du nœud sur les barres qui y aboutissent.

Ainsi, dans la figure 83, le dynamique du nœud A est *adc* qui sera parcouru dans le sens *adc* par le second mobile lorsque le premier tourne autour de A dans le sens contraire à α. Les actions *ad* et *dc* du nœud A sur les barres AO et AE sont donc, comme on l'observe d'après leur sens, *des compressions*.

Considérons encore le second nœud E. Son dynamique parcouru dans le sens contraire à α est *cdefc*. Les sens des 4 actions du nœud sur les 4 barres EA, ED, EC, EB sont donc *cd*, *de*, *ef*, *fc*. On voit que *cd* et *fc* sont des *compressions* et *de*, *ef* des *tractions*.

Dans la mise à l'encre, on tracera, dans le dynamique, les efforts des barres qui travaillent en *compression*, en *bleu*, les efforts des barres qui travaillent en *traction* en *rouge* et les forces extérieures en *noir*.

Dans les épures que nous ferons dans la suite nous tracerons en trait mixte — · — · — · — avec *un* tiret et *un* point alternés les *compressions* ; et en trait mixte — ·· — ·· — ·· — avec *un* tiret et *deux* points alternés les *tractions*.

Nous conserverons cette notation dans toutes les épures suivantes.

Nous allons, maintenant, *à titre d'exercices*, appliquer ces règles générales à des exemples, pour mieux faire voir comment se fait cette application.

148. ***Exercice I. — Poutre armée à un seul poinçon.*** — Soit une *poutre* AB soutenue en un point C par un *poinçon* CD que soutiennent, à leur tour, deux *tirants* obliques, AD, BD. La poutre repose, à ses deux extrémités, sur des appuis de niveau ; elle

est uniformément chargée d'un poids total P. On demande les tensions des pièces (fig. 84).

En A et B on a deux réactions X et Y verticales et égales.

La charge uniformément répartie sur AC se décom-

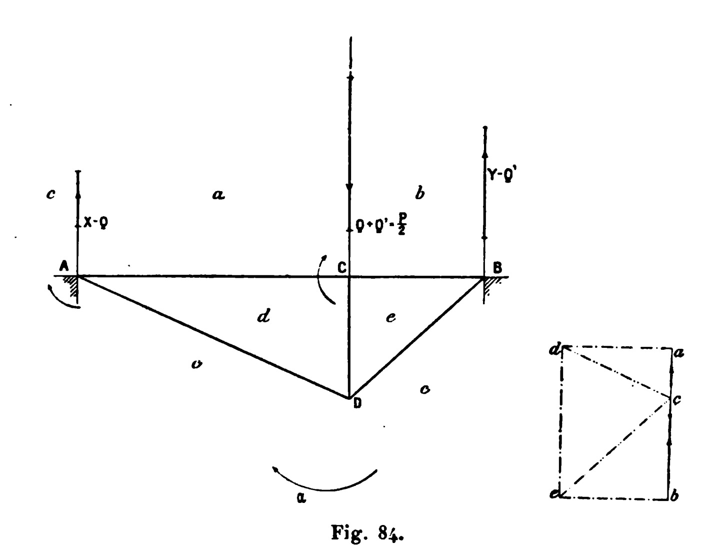


Fig. 84.

pose en deux charges égales Q appliquées en A et en C; de même, la charge uniformément répartie sur BC se décompose en deux charges égales Q′ appliquées en B et en C. On a donc au point C une force égale à la demi-charge totale c'est-à-dire égale à $\frac{P}{2}$; au point A deux forces de sens contraires X et Q qui donnent une résultante égale à leur différence ; au point B deux forces de sens contraires Y et Q′ qui donnent une résultante égale à leur différence.

Imaginons que nous prolongions les lignes d'ac-

tion des forces, et dans chaque surface mettons une lettre : soient a, b, c, d, e. Prenons un sens de rotation et construisons le dynamique en suivant la règle énoncée plus haut (n° **145**). En allant de l'aire c à l'aire a on traverse la force (X-Q), menons une droite ca égale, parallèle à (X-Q) et de même sens ; en allant de l'aire a à l'aire b on traverse la force $\frac{P}{2}$, menons la droite ab égale, parallèle à $\frac{P}{2}$ et de même sens ; enfin en allant de b en c on traverse Y-Q′ et nous menons la droite bc égale et parallèle à Y-Q′ qui ferme le dynamique des forces extérieures ca, ab, bc.

Prenons le nœud A où aboutissent deux barres et où agit la force extérieure (X-Q) et tournons dans le sens choisi. On va de l'aire c à l'aire a en traversant la force (X-Q) : dans le dynamique la parallèle ca à X-Q est déjà tracée. Puis on passe de l'aire a à l'aire d en traversant AB, menons par a une parallèle à AB. On revient ensuite de l'aire d à l'aire c en traversant AD, et nous menons par c une parallèle à AD. Ces deux droites se coupent au point d, ce qui donne les deux tensions ad, cd des barres AC et AD.

On passe ensuite au nœud C où les deux tensions suivant CD et CB sont inconnues ; on construit le dynamique $dabe$, ce qui donne les deux tensions ed et eb inconnues suivant CD et CB.

On joint ec qui donne la dernière tension suivant DB.

Comme vérification, ec doit être parallèle à la droite DB.

Il reste à déterminer si on a affaire à une compression ou à une traction dans les tensions des barres de la poutre armée.

Le dynamique du nœud A, lorsqu'on tourne autour de lui dans le sens contraire à α, est parcouru dans le sens *dac*. Les actions du nœud A sur les barres AC et AD sont donc *da* qui est une compression et *cd* qui est une traction.

En tournant dans le sens opposé à α autour du nœud C son dynamique est parcourue dans le sens *adeb* ; *ad*, action du nœud sur AC est une compression comme on l'a déjà vu, *de* et *eb* sont également des compressions.

Enfin, quand on tourne autour de D dans le sens opposé à α le dynamique est parcouru dans le sens *ced* ; *ce* et *dc* sont des tractions, *ed* est une compression.

149. ***Exercice II.* — *Poutre triangulée à triangles isocèles.*** — Une poutre triangulée à triangles isocèles se compose d'un certain nombre de triangles isocèles disposés comme l'indique la figure ci-contre (fig. 85). Supposons cette poutre reposant sur les points d'appui A et B, de portée l, et chargée d'un poids p par mètre courant appliqué en haut. La charge appliquée à chaque sommet C, D, E, sera

$$q = \frac{pl}{4}.$$

La charge appliquée aux nœuds A et B sera

$$\frac{q}{2} = \frac{pl}{8}$$

et les réactions aux points A et B seront

$$X = Y = 2q.$$

En A et B sont donc appliquées des forces égales à $X - \frac{q}{2}$ et $Y - \frac{q}{2}$ ou à $2q - \frac{q}{2} = \frac{3q}{2} = \frac{3pl}{8}$.

Ceci posé, mettons des lettres dans les aires que

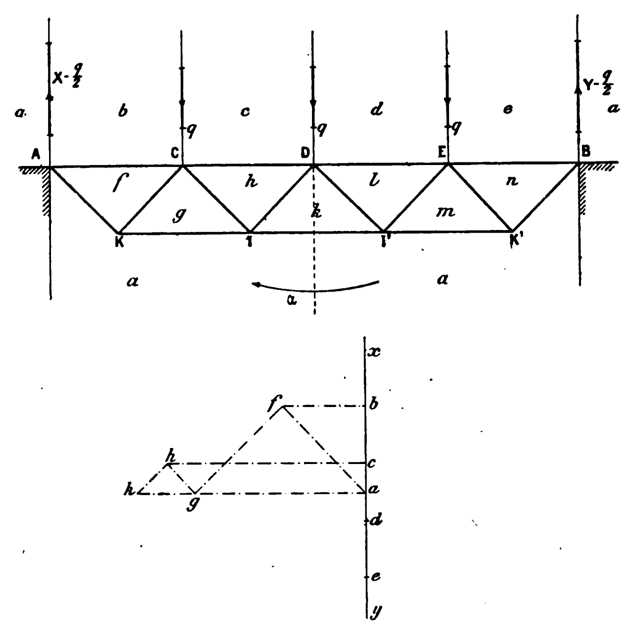


Fig. 85.

forment les forces et les barres et prenons un sens de rotation α.

Traçons le dynamique des forces extérieures. En tournant dans le sens choisi, nous allons de l'aire a à l'aire b en traversant la force $X - \frac{q}{2} = \frac{3pl}{8}$: sur la verticale xy, parallèle aux forces, prenons un segment ab égal à $X - \frac{3q}{2}$ et de même sens. Puis nous allons de b en c en traversant q et nous menons

$bc = q$; nous allons de c en d en traversant q et nous menons $cd = q$; de d en c en traversant q et nous menons $de = q$; et enfin de e en a en traversant $Y - \frac{q}{2}$ et nous menons $ea = Y - \frac{q}{2}$. Comme vérification, après avoir porté la longueur $Y - \frac{q}{2}$ nous devons revenir au point de départ a.

Partons du nœud A où aboutissent deux barres AC, AK et une force extérieure $X - \frac{q}{2}$ et cherchons les deux tensions suivant AC, AK. Pour cela, tournons dans le sens choisi : nous allons de a en b, ce qui donne ab déjà tracée dans le dynamique; puis nous allons de b en f en traversant AC, menons dans le dynamique une parallèle par le point b à la barre AC traversée. Enfin, nous revenons de f en a en traversant KA et nous menons dans le dynamique une parallèle par a à la barre KA. Les deux dernières droites ainsi menées se coupent en un point f et les tensions des barres AC, AK sont données par les longueurs bf, fa du dynamique.

On passe ensuite au nœud K où les tensions suivant KC, KI sont inconnues. On trace le dynamique afg qui donne les deux tensions fg et ga cherchées. On passe au nœud C, qui donne le dynamique $bchgf$ et les tensions ch et hg suivant les barres CD et CI. Enfin, on passe au nœud I et on détermine le dynamique $ghka$ qui donne les tensions hk et ka suivant ID et II'.

Il est inutile de continuer car, la figure étant symétrique, les tensions des barres symétriques sont respectivement égales. Il reste à savoir si l'on a affaire à des compressions ou à des tractions.

Nous imaginons donc, suivant la règle du n° **147**,

un mobile tournant successivement autour de chaque nœud dans le sens *contraire* à α et nous suivons sur les dynamiques partiels la marche du mobile correspondant.

Le dynamique de A est parcouru dans le sens *afba*; *af* est une traction, *fb* une compression.

Le dynamique de C est parcouru dans le sens *bfghcb*; *bf* est une compression (déjà trouvée), *fg* une compression, *gh* une traction, *hc* une compression.

Le dynamique de I est parcouru dans le sens *akhga*; *ak* est une traction, *kh* une compression, *hg* une traction (déjà trouvée), *ga* une traction.

150. ***Exercice III.*** — Nous avons admis, dans l'exemple précédent, que la charge de la poutre était supportée tout entière par les nœuds supérieurs et que les nœuds inférieurs ne supportaient rien.

Dans la pratique, on admet généralement que les nœuds inférieurs supportent une partie de la charge, environ le dixième.

Soit alors P la charge totale, p la charge supportée par un des panneaux supérieurs et q celle que supporte l'un des panneaux inférieurs FG, GH, HK (fig. 86). On aura :

$$4p = \frac{9P}{10}, \quad 3q = \frac{P}{10};$$

d'où

$$p = \frac{9P}{40}, \quad q = \frac{P}{30}.$$

Chacun des nœuds supérieurs C, D, E supportera une charge p, et chacun des nœuds A et B une charge $\frac{p}{2}$. Les nœuds inférieurs G et H supporteront chacun

une charge q, et chacun des nœuds F et K une charge $\frac{q}{2}$.

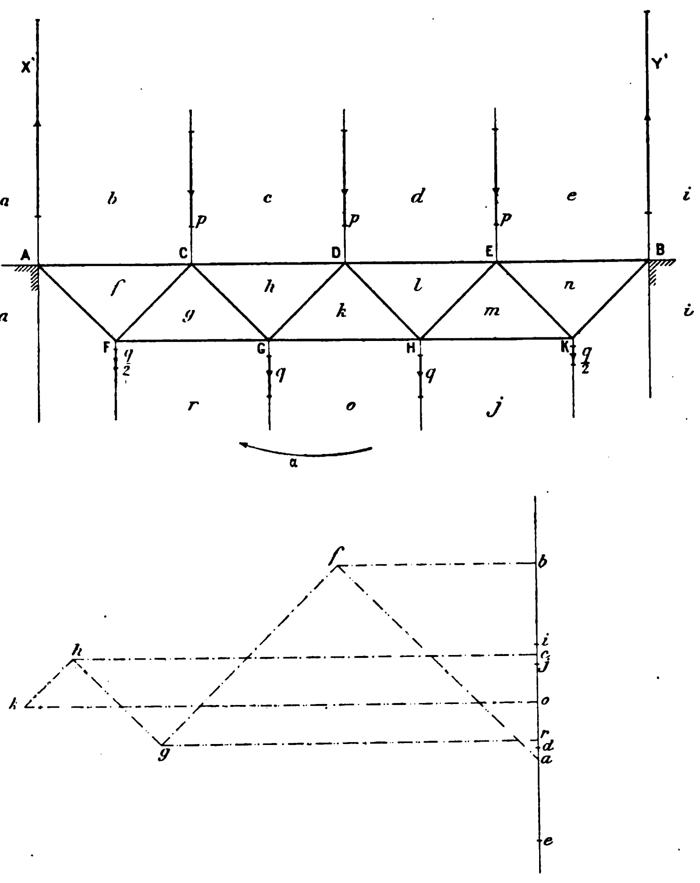


Fig. 86.

Les réactions X et Y en A et B sont égales à la moitié de la charge totale $\frac{P}{2}$. De telle sorte que ces deux nœuds A et B sont soumis en réalité à des

forces X′ et Y′ égales à $\frac{P}{2} - \frac{p}{2}$, différence entre la réaction et la charge partielle provenant du panneau contigu.

Ceci posé, plaçons des lettres *a*, *b*, *c*, etc., dans les aires et adoptons un sens de rotation α (fig. 86).

Traçons d'abord le dynamique des forces extérieures *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ei*, *ij*, *jo*, *or*, *ra* dans l'ordre où on les rencontre en tournant autour du système dans le sens α.

Partons maintenant du nœud A. En tournant dans le sens choisi, nous formons le dynamique *abf* qui donne les deux tensions *bf*, *fa* suivant les barres AC, AF.

Au nœud F, nous avons le dynamique *rafg* qui donne les deux tensions *fg*, *gr* suivant les barres FC, FG.

Au nœud C, nous avons le dynamique *gfbch* qui donne les deux tensions *ch*, *hg* suivant les barres CD, CG.

Le nœud G donne le dynamique *orghk* et les deux tensions *hk*, *ko* suivant les barres GD, GH.

On a ainsi la moitié du dynamique.

Il est inutile de tracer l'autre moitié qui serait symétrique de celle-ci par rapport à *ok*.

Il reste à déterminer les compressions et les tractions :

Il suffit pour cela de reprendre chacun des dynamiques précédents, en ordre inverse du parcours.

151. ***Exercice IV. — Poutre à triangles rectangles.*** — Barres descendantes. — Soit une poutre triangulée à triangles rectangles chargée à la partie inférieure AB (fig. 87). Les nœuds C, D, E supportent une charge *p* et les nœuds A et B une charge

$\frac{p}{2}$; les réactions aux points A et B sont $X = Y = 2p$ et les deux nœuds A et B sont donc soumis aux forces X′, Y,′

$$X' = Y' = 2p - \frac{p}{2} = \frac{3p}{2}.$$

Plaçons des lettres dans les aires que forment les

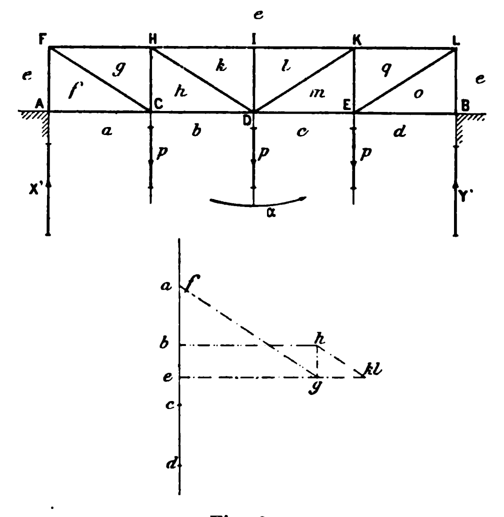


Fig. 87.

forces et prenons un sens de rotation α. Formons le dynamique *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea* des forces extérieures et partons du nœud α dont nous formons le dynamique *aef*. On voit que le point *f* coïncide avec le point *a*, la barre AC a une tension nulle ; théoriquement on peut la supprimer. La barre AF supporte toute la pression, sa tension est *fe*.

Au nœud F, nous avons le dynamique *efg* qui donne les deux tensions *fg* et *ge* suivant FC et FH.

Au nœud C, nous avons le dynamique *gfabh* qui

donne les deux tensions *bh* et *hg* suivant CD et CH.

Au nœud H, nous avons le dynamique *eghk* qui donne les deux tensions *hk* et *ke* suivant HD et HI.

Enfin, au nœud I, nous avons le dynamique *ekl* ; le point *l* coïncide avec le point *k*, la barre ID a une tension nulle et théoriquement on peut la supprimer.

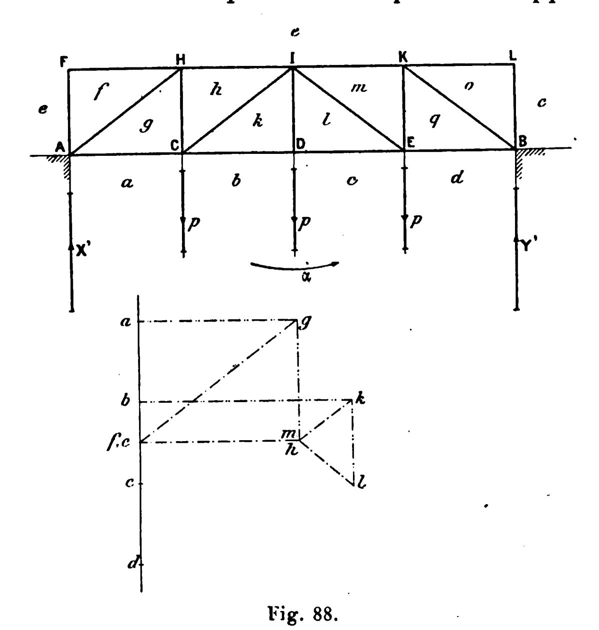


Fig. 88.

Le reste de la figure s'obtient par symétrie par rapport à *ek*.

Déterminons les compressions et les tractions. En suivant la même marche que dans les questions précédentes on trouve que les barres obliques sont étendues, les barres verticales sont comprimées, les barres FH, HI, IK, KL (semelle supérieure) sont comprimées, les barres AC, CD, DE, EB (semelle inférieure) sont étendues.

152. ***Exercice V.*** — ***Poutre à triangles rectangles.*** — BARRES MONTANTES. — En suivant la même marche que pour les barres descendantes, on construira facilement l'épure ci-contre (fig. 88). On voit que les points *e* et *f* se confondent et que, par conséquent les barres FH et AF ont des tensions nulles, ce qui était à prévoir puisqu'il n'y a aucune force extérieure agissant sur le nœud F à deux barres.

Les barres obliques sont comprimées, les barres verticales étendues, la semelle supérieure comprimée et la semelle inférieure étendue.

153. ***Exercice VI.*** — ***Ferme Polonceau à une contre-fiche.*** — La figure 89 nous montre un exemple simple de ferme de comble formée de deux *arbalétriers* AB, AC, de deux *contre-fiches* DE, D'E' et de *tirants* BE, AE, AE', CE' et EE'. Supposons d'abord qu'on ne tienne pas compte du vent et soit pl la charge uniformément répartie sur l'albalétrier AB de longueur l. Au nœud D sera appliquée une charge $\frac{pl}{2}$ provenant de la charge uniformément répartie sur MN ; au nœud B sera appliquée une charge $\frac{pl}{4}$ provenant de la charge sur BM ; au nœud A sera appliquée une charge $\frac{pl}{2}$ provenant des charges sur AN et AN'. Enfin en D' et en C seront appliquées les mêmes charges qu'en D et B. Les réactions X et Y aux appuis B et C sont égales entre elles et égales à pl. Il en résulte qu'aux nœuds B et C sont appliquées deux forces X' et Y' égales chacune à l'excès de la réaction sur la charge qui vient

se perdre dans l'appui, c'est-à-dire à :

$$X' = Y' = pl - \frac{pl}{4} = \frac{3pl}{4}$$

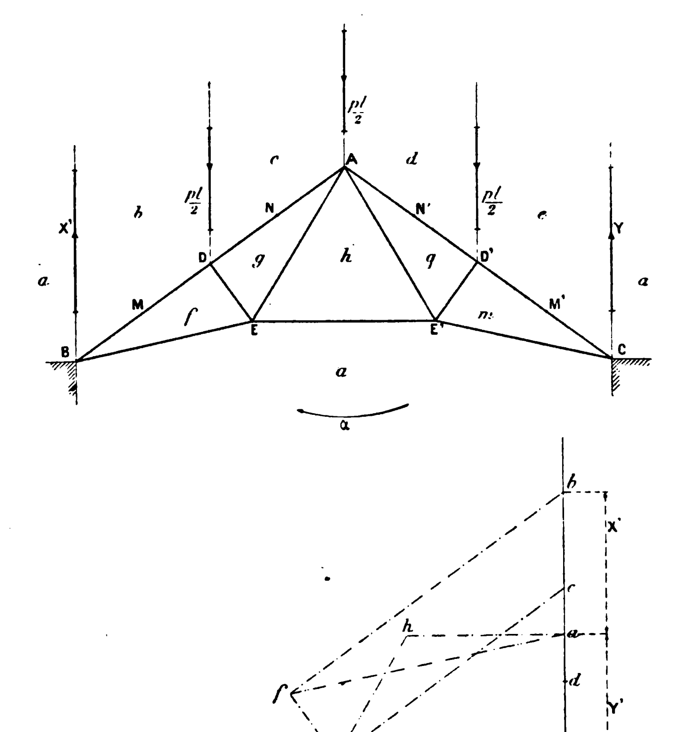


Fig. 89.

Traçons le dynamique des forces extérieures *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea*.

Au nœud B, en tournant dans le sens α, nous for-

mons le dynamique *abf*, qui donne les tensions *bf*, *fa* suivant BD, BE.

Au nœud D nous formons le dynamique *fbcg*, qui donne les tensions *cg*, *gf* suivant DA, DE.

Puis, au nœud E nous formons le dynamique *afgh* qui donne les tensions *gh*, *ha* suivant EA, EE′.

Nous avons ainsi la moitié du dynamique total, ce qui suffit, vu la symétrie de la figure.

Distinguons les compressions et les tractions :

Tournons, successivement autour de chaque nœud dans le sens *contraire* au sens α et imaginons un mobile qui parcourt le dynamique partiel correspondant dans l'ordre des lettres des aires traversées.

Le dynamique de B est parcouru dans le sens *afba* ; *af* est une traction, *fb* une compression. Le dynamique de D est parcouru dans le sens *bfgcb* ; *fg* est une compression, *gc* également. Enfin le dynamique de E est parcouru dans le sens *ahgfa* ; *ah* est une traction, ainsi que *hg*.

Remarque. — Si l'on avait abaissé le tirant EE′ jusqu'à l'horizontale passant par le pied B de la ferme, les tirants BE, EE′, E′C seraient en ligne droite.

L'épure ne serait pas modifiée ; seulement la ligne *af* serait horizontale comme *ah* et les deux lignes se confondraient en direction.

154. *Exercice VII. — Effet du vent sur une ferme Polonceau à une contrefiche.* — Pour déterminer les divers efforts qui s'exercent suivant les barres de la ferme Polonceau, nous avons négligé l'action du vent sur le comble ; il est facile d'en tenir compte. Pour cela, il n'y a qu'à faire une épure en tenant compte *uniquement* de l'effet du vent et à super-

poser, ensuite, les deux effets du vent et des forces extérieures.

Soit la ferme Polonceau représentée par la figure 90 et supposons que le vent souffle de droite à gauche dans la direction R.

Le vent produit sur le versant de droite une pression *normale* qu'il est facile de déterminer, comme nous l'avons expliqué au n° **127**. Soit p la pression produite sur AD et sur DC.

Au nœud D est appliquée la pression p exercée par le vent sur la surface MN du toit; aux nœuds A et C sont appliquées les pressions $\frac{p}{2}$ exercées sur les surfaces AM et CN du toit.

Ces trois forces normales à AC donnent lieu à deux réactions en C et B. Admettons que la réaction au point C soit verticale (n° **128**); celle au point B aura une direction inconnue que nous allons déterminer comme au n° **128**. Pour cela, traçons le dynamique des trois forces, données prenons un pôle P quelconque et menons les rayons polaires 0, 1, 2, 3. Puis, nous traçons le funiculaire, en menant la parallèle 0 par le point B, et nous le fermons par la droite 4. Le rayon polaire parallèle à 4 rencontre la verticale FG parallèle à la réaction X au point G qui donne l'intensité FG de X; joignant G à K on a la direction et l'intensité GK de la réaction Y au point B.

Ceci posé, traçons le dynamique *abcdn* des forces extérieures après avoir mis des lettres dans les aires que forment les forces et les barres, et après avoir pris un sens de rotation α. Ce n'est autre que la figure GKF et ces deux figures peuvent se superposer.

Au nœud B, nous formons le dynamique *abf*, qui donne les tensions *bf*, *fa* suivant BA, BE'.

Au nœud D′ nous formons le dynamique *fbg*; le

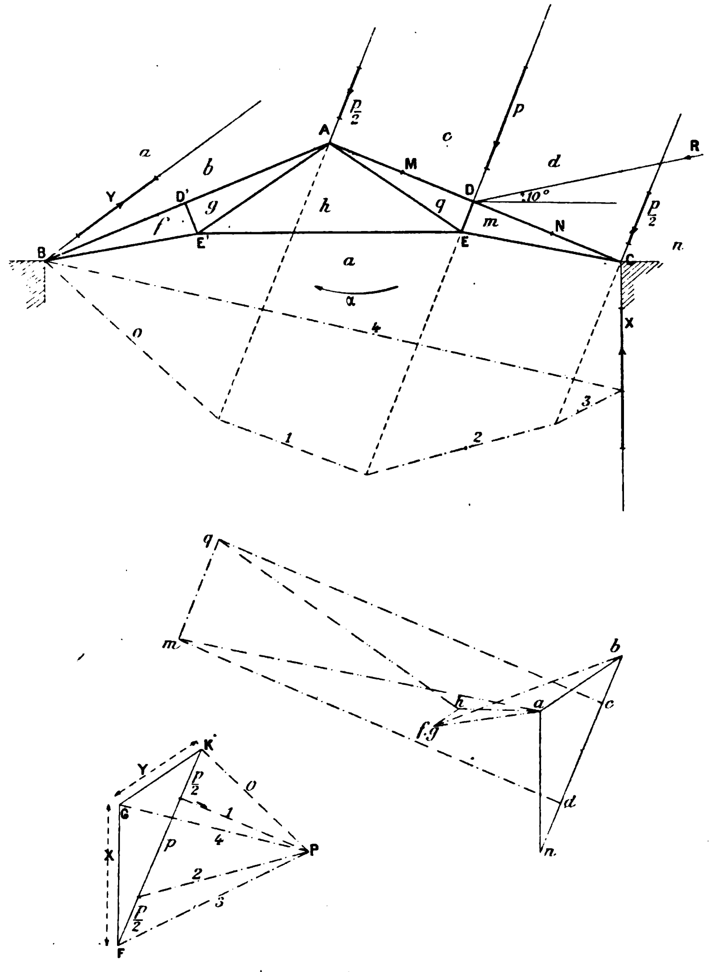


Fig. 90.

point *g* coïncide avec le point *f*; *gf* étant nul, la barre D′E′ ne travaille pas sous l'action du vent.

Au nœud E′, nous formons le dynamique *afgh*, qui donne les tensions *gh*, *ha* suivant E′A, E′E.

Au nœud A, nous formons le dynamique *hgbcq*, qui donne les tensions *cq*, *qh* suivant AD, AE.

Au point D, nous formons le dynamique *qcdm*, qui donne la tension *nq* suivant ED.

Enfin, en joignant *m* à *a*, on a la tension *ma* suivant EC et, comme vérification de l'épure, il faut que *ma* soit parallèle à la barre EC.

On trouve facilement les tractions et les compressions. Dans la figure, les tractions sont représentées par un trait formé d'*un* tiret et *deux* points alternés et les compressions par un trait formé d'*un* tiret et d'*un* point alternés.

Les barres AE, AE′, EC, EE′, BE′ sont étendues, les deux arbalétriers et la barre ED sont comprimés, la barre D′E′ ne subit aucun effort de la part du vent.

Ceci posé, il ne reste plus qu'à totaliser les efforts dus aux forces extérieures et à l'action du vent en relevant les efforts partiels sur chacune des épures tracées ; les efforts qui sont des tractions dans les deux cas, s'ajoutent les uns aux autres, de même les compressions ; les compressions et les tractions se retranchent les unes des autres et donnent des compressions ou des tractions suivant les cas.

Remarque. — Ces deux épures peuvent se faire en une seule épure en considérant les forces extérieures et l'action du vent simultanément.

155. ***Exercice VIII. — Ferme de comble à la Mansard.*** — Soit un comble à la Mansard de la forme de la figure 91. Ce type de comble est en général

symétrique. Nous supposerons que l'on néglige l'action du vent.

Au nœud C est appliquée une charge p provenant

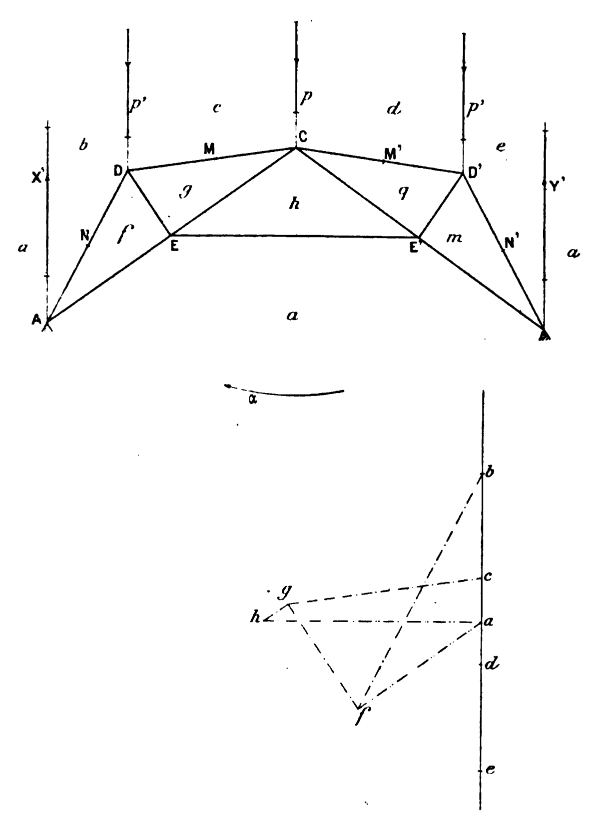


Fig. 91.

de la charge uniformément répartie sur MCM'; aux nœuds D et D' une charge p' provenant de la charge uniformément répartie sur MDN et M'D'N' et enfin aux appuis, une charge p'' provenant de la charge sur AN et BN'.

Les réactions aux appuis sont égales entre elles et égales à

$$X = Y = \frac{2p'' + 2p' + p}{2} = p'' + p' + \frac{p}{2}.$$

Déduction faite des charges p'' il reste en A et B des forces

$$X' = Y' = p' + \frac{p}{2}.$$

Formons le dynamique des forces extérieures *abcde*.

Au nœud A, nous formons le dynamique *abf*, qui donne les tensions *bf* et *af* suivant AD et AE.

Au nœud D, nous formons le dynamique *fbcg*, qui donne les tensions *cg* et *gf* suivant DC, DE.

Au nœud E, nous formons le dynamique *afgh*, qui donne les tensions *ha*, *gh* suivant EE′, EC.

Le reste de la figure s'obtiendrait par symétrie ; mais il est inutile de le tracer.

Distinguons les tractions et les compressions. Tournons autour de chaque nœud dans le sens *contraire* au sens α et imaginons un mobile parcourant, pour chaque nœud, le dynamique, dans l'ordre des lettres des aires traversées.

Le dynamique de A est parcouru dans le sens *afba* ; *af* est une traction, *fb* une compression.

Le dynamique de D est parcouru dans le sens *cbfgc* ; *fg* est une traction, *gc* une compression.

Enfin, le dynamique de E est parcouru dans le sens *fghaf* ; *gh* est une traction et *ha* aussi.

CHAPITRE VI

CENTRES DE GRAVITÉ. — MOMENTS D'INERTIE

§ I. — Définitions

156. ***Centre de forces parallèles.*** — Considérons un système de forces parallèles et *de même sens*, quatre par exemple, F_1, F_2, F_3, F_4 (fig. 92). Les forces F_1, F_2 ont une résultante R_1 égale à $F_1 + F_2$ et dont la direction passe par un certain point B_1, situé sur la droite $A_1 A_2$, entre A_1 et A_2, tel que l'on ait (n° **41**).

$$\frac{B_1 A_1}{B_1 A_2} = \frac{F_2}{F_1}. \qquad (1)$$

Les forces R_1 et F_3, ont, à leur tour une résultante R_2 égale à $R_1 + F_3$ et dont la direction passe au point B_2 situé sur $B_1 A_3$, entre B_1 et A_3, tel que l'on ait

$$\frac{B_2 B_1}{B_2 A_3} = \frac{F_3}{R_1} = \frac{F_3}{F_1 + F_2}. \qquad (2)$$

Enfin, les forces R_2 et F_4 admettent une résultante R égale à $R_2 + F_4$ et dont la direction passe au point C situé sur $B_2 A_4$, entre B_2 et A_4, tel que l'on ait

$$\frac{C B_2}{C A_4} = \frac{F_4}{R_2} = \frac{F_4}{F_1 + F_2 + F_3}. \qquad (3)$$

Cette dernière résultante R est celle du système

donné : elle est parallèle aux composantes, égale à leur somme, et agit dans le même sens qu'elles.

Le point C, que nous venons de construire, dont la position est définie par les égalités (1), (2) et (3) et par lequel passe la ligne d'action de cette résultante se nomme *le centre des quatre forces parallèles*.

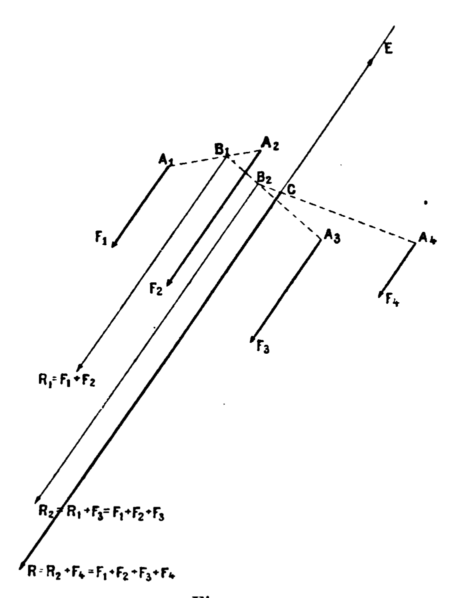


Fig. 92.

Il est bon de remarquer que, d'après cela, B_1 est le *centre* des forces parallèles F_1 et F_2, et que B_2 est le *centre* des forces R_1 et F_3.

Ce centre des forces parallèles jouit d'un certain nombre de propriétés.

157. ***Propriété I.*** — *La position du centre des forces parallèles ne change pas quand on change la*

direction commune des forces sans changer ni leur intensité, ni leurs points d'application.

En effet, reportons-nous à la construction de ce centre des forces parallèles : le point B_1 doit vérifier l'égalité (1), c'est-à-dire qu'il dépend seulement de la position des points d'application des composantes et du rapport de leurs intensités et non de la direction de ces forces ; il en est de même pour le point B_2 défini par l'égalité (2) et pour le point C défini par l'égalité (3).

158. ***Propriété II.*** — *La position du centre des forces parallèles est indépendante de l'ordre dans lequel on compose les forces pour former la résultante finale* R.

En effet, supposons que nous ayons fait la composition des forces F_1, F_2, F_3, F_4 dans l'ordre où nous l'avons fait plus haut (nº **156**) et que nous ayons obtenu une résultante R et un centre des forces parallèles C. Appliquons au point C une force E égale et directement opposée à R ; E est l'équilibrante des forces F_1, F_2, F_3, F_4. Composons les forces F_1, F_2, F_3, F_4 dans un autre ordre ; soit R′ la nouvelle résultante du système et C′ le nouveau centre des forces parallèles. Les forces R′ et E doivent se faire équilibre et par conséquent, il faut que les forces R′ et E soient égales et directement opposées. La ligne d'action de la force R′ passe donc par le point C ; d'ailleurs elle passe aussi par C′ et comme ceci a lieu quelle *que soit la direction commune des forces*, il faut nécessairement que C′ coïncide avec C. Donc la position du centre des forces parallèles est indépendant de l'ordre dans lequel on compose les forces pour former la résultante R.

Corollaire. — *On ne change pas le centre des forces parallèles en remplaçant un groupe de quelques-unes de ces forces par leur résultante appliquée au centre de ce groupe.*

159. *Propriété III.* — *Le centre des forces parallèles ne change pas quand on fait varier proportionnellement les intensités de toutes les forces.*

En effet, en faisant varier proportionnellement les intensités des forces, leurs rapports mutuels ne changent pas, les égalités (1), (2), (3), (n° **156**) qui donnent les points B_1, B_2 et C subsistent et par conséquent la position du centre C ne change pas.

160. *Résumé.* — On peut donc dire que :

Le CENTRE *de forces parallèles et de même sens est un point fixe par lequel passe la ligne d'action de la résultante de toutes ces forces, qui ne change pas lorsque, sans changer les points d'application des forces, on change leur direction commune ou on fait varier proportionnellement leurs intensités.*

161. REMARQUE I. — *Si les points d'application des forces parallèles sont dans un même plan, le centre de ces forces est situé dans ce plan.*

Cela est évident, car si les points A_1, A_2, A_3, A_4 (fig. 92) sont dans un même plan, les droites A_1A_2, B_1A_3, B_2A_4 sont dans ce même plan et le point C situé sur B_2A_4 y est aussi.

162. REMARQUE II. — *Si tous les points d'application des forces parallèles sont en ligne droite le centre de ces forces est sur cette ligne droite.*

Ceci résulte évidemment de la construction faite pour trouver les points B_1, B_2, C.

163. *Centre de gravité.* — On sait que l'action de la pesanteur s'exerce sur toutes les molécules d'un corps : chacune d'elles peut donc être considérée comme étant sollicitée par une force qui l'attire vers le centre de la terre. Toutes ces forces sont parallèles ; elles ont par suite une résultante parallèle à leur direction et égale à leur somme. Cette résultante est le *poids* du corps.

Le POIDS *d'un corps est donc la résultante des actions de la pesanteur sur toutes les particules de ce corps.*

Le CENTRE DE GRAVITÉ *d'un corps est un point fixe de ce corps par lequel passe la direction de son poids, quelle que soit l'orientation du corps dans l'espace.*

Pour légitimer cette définition du centre de gravité, montrons que, quelle que soit la position que l'on donne à un corps dans l'espace, la direction de son poids passe par un point fixe.

Considérons un corps solide (fig. 93) et partageons-le en un très grand nombre de parties très petites, assez petites pour pouvoir être considérées comme des points matériels. Chaque point matériel M a un poids p ; et le poids du corps solide, d'après la définition, est la résultante de tous les poids p des points matériels tels que M. Soit G le centre de ces forces parallèles p ;

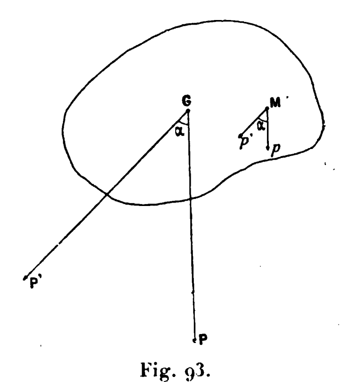


Fig. 93.

G est un point de la ligne d'action de la résultante des forces p, c'est-à-dire du poids P du corps solide. Changeons l'orientation du corps solide ou, ce qui revient au même, faisons tourner toutes les forces p

d'un certain angle α ; ceci ne change ni l'intensité de chacune des forces p, ni son point d'application, par conséquent (n° **157**) la nouvelle ligne d'action P' du poids passe encore au point G qui est le centre des forces parallèles. La direction du poids passe donc bien par un point fixe G, quelle que soit l'orientation du corps dans l'espace ; ce point fixe est *le centre de gravité* du corps.

164. ***Corps homogènes.*** — On dit qu'un corps est *homogène* lorsqu'il est formé d'une même substance distribuée uniformément dans toute son étendue, de telle sorte que deux ou plusieurs parties du même corps qui ont des volumes égaux ont aussi des poids égaux, si petits que soient ces volumes.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons toujours que les corps dont nous nous occuperons sont homogènes.

165. ***Densité d'un corps.*** — On appelle *densité* d'un corps homogène le rapport de son poids à son volume.

Ainsi, si V est le volume d'un corps, P son poids et d sa densité, on a la formule fondamentale

$$P = Vd.$$

166. ***Théorème.*** — *Le centre de gravité d'un corps homogène est indépendant de sa densité.*

En effet, on a démontré (n° **159**) que le centre de forces parallèles ne change pas quand on fait varier proportionnellement les intensités des forces données ; or, si on fait varier la densité d'un corps homogène, tous les poids de ses diverses parties varient proportionnellement et par conséquent le centre de gravité ne change pas.

Il résulte de là que :

Dans tous les corps homogènes, la position du centre de gravité ne dépend que de la forme géométrique du corps.

Ainsi, deux disques identiques, l'un en bois, l'autre en fer, de même volume, ont le même centre de gravité. Ceci ne serait pas vrai si les corps n'étaient pas homogènes.

Il en résulte que, dans la suite, pour trouver le centre de gravité d'un corps homogène, nous pourrons donner à la densité telle valeur qui nous plaira.

§ 2. — Centres de gravité des lignes et des surfaces

167. *Définitions.* — Une surface qui n'a pas d'épaisseur, et une ligne qui n'a qu'une seule dimension, ne peuvent pas être pesantes et n'ont pas, à proprement parler, de centre de gravité. Mais on peut concevoir la surface et la ligne partagées, l'une en éléments superficiels, et l'autre en éléments linéaires auxquels on suppose appliqués des poids proportionnels à leurs dimensions. Ces forces ont une résultante égale à leur somme et leur *centre* est appelé *centre de gravité* de la surface ou de la ligne.

On dira donc qu'une ligne est un corps dans lequel les dimensions transversales sont négligeables par rapport à la longueur ; et qu'une ligne est homogène si deux portions de longueurs égales ont même poids, quelque petites que soient ces portions.

On dira qu'une surface est homogène si deux portions de même aire ont même poids, quelque petites que soient ces portions.

Pratiquement on réalise une ligne pesante en la supposant formée

par un fil de fer rigide. De même une plaque de tôle mince réalise assez bien une surface pesante.

168. ***Théorème.***—*Si une ligne homogène a un centre de figure, ce point est le centre de gravité de la ligne.*

En effet, prenons une portion très petite MM′ de la ligne L de centre O, assez petite pour pouvoir être considérée comme *un point*, et la portion NN′ symétrique de MM′ par rapport au point O (fig. 94). Les portions égales MM′ et NN′ ont même poids *p* par définition de l'homogénéité.

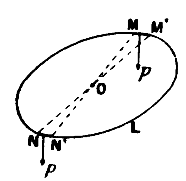


Fig. 94.

Le centre des forces parallèles de ces deux poids *p* est au milieu de la droite qui joint les points d'application de ces deux poids ; c'est donc le point O.

Mais on peut découper toute la ligne L en morceaux, deux à deux, symétriques par rapport au point O ; chaque couple de deux morceaux symétriques donne pour centre des forces parallèles le point O.

Le centre total qui est le *centre de gravité* est donc le point O.

169. ***Applications.*** — *Le centre de gravité d'un segment de droite est son milieu*, puisque le milieu de la droite est son centre de figure.

Le centre de gravité du périmètre d'un polygone régulier est son centre de figure.

Le centre de gravité de la circonférence d'un cercle est le centre de ce cercle.

170. ***Théorème.*** — *Si une ligne plane et homogène a un axe de symétrie, son centre de gravité est sur cet axe.*

En effet, soit (fig. 95) un arc plan AB admettant un axe de symétrie xy.

L'axe de symétrie partage l'arc AB en deux parties symétriques AC et CB.

A une portion M très petite de l'arc AC correspond une portion M′ symétrique de l'arc BC par rapport à l'axe xy ; comme ces deux portions sont symétriques, elles sont égales et leurs poids p sont égaux.

Le *centre* des forces parallèles de ces deux poids est le point I, milieu de MM′, ce point I est sur l'axe de symétrie xy.

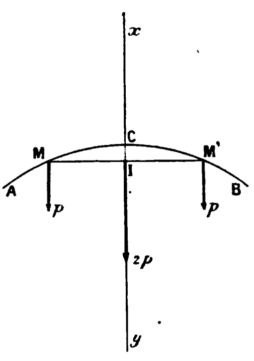


Fig. 95.

Pour avoir le centre de gravité de l'arc AB, il reste à prendre (n° **158**) le centre des forces parallèles de tous les poids tels que $2p$ appliqué au point I ; le centre des forces parallèles sera donc (n° **162**) sur l'axe xy et par conséquent le centre de gravité cherché est sur l'axe xy.

171. ***Centre de gravité du périmètre d'un triangle.*** — Soit le triangle ABC (fig. 96). Le centre de gravité de chacun de ses côtés est situé au milieu de ce côté.

On obtiendra donc le centre de gravité de la figure en cherchant le centre de trois forces parallèles appliquées aux points a, b, c, milieux des côtés, et proportionnelles aux longueurs BC, AC, AB de ces côtés ; soient α, β, γ ces trois forces. Si l'on compose les forces appliquées en c et b, leur résultante $\beta + \gamma$ sera appliquée en un point I de la droite cb, tel

que l'on ait :

$$\frac{\mathrm{I}b}{\mathrm{I}c} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}, \qquad (1)$$

puisque les forces γ et β sont respectivement proportionnelles aux longueurs AB et AC.

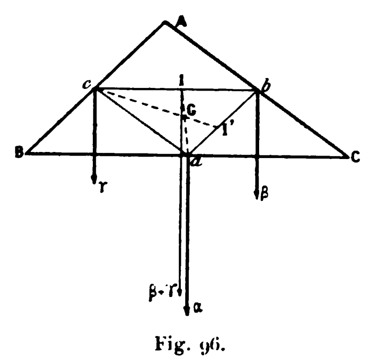


Fig. 96.

La résultante du système des trois forces aura donc son point d'application situé sur la droite Ia. Or, si l'on joint ca, ba, on forme un triangle abc semblable au triangle ABC (cb qui joint les milieux des côtés AC et AB est parallèle à BC et égal à sa moitié, de même ac est parallèle à AC et ab est parallèle à AB). On a donc la proportion

$$\frac{ab}{ac} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}.$$

Comparant cette proportion avec la relation (1), il vient

$$\frac{ab}{ac} = \frac{\mathrm{I}b}{\mathrm{I}c}.$$

Par suite, la droite Ia est la bissectrice de l'angle cab. Le centre de gravité demandé est donc situé sur la bissectrice de l'un des angles cab du triangle formé en joignant les milieux des côtés du triangle ABC. En composant les forces appliquées en a, b, c, dans un ordre différent on prouverait de même que la résultante de ces forces a son point d'application

situé sur la bissectrice d'un second angle du triangle *a*, *b*, *c* : ce point d'application est donc à la rencontre des bissectrices des angles du triangle *abc*.

Le centre de gravité du périmètre d'un triangle est situé au centre du cercle inscrit dans le triangle qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle donné.

Remarque. — Pour déterminer la position du centre de gravité d'un contour polygonal quelconque, on n'a qu'à supposer appliquées aux milieux des côtés de ce contour des forces parallèles proportionnelles aux longueurs de ces côtés ; on compose ces forces, et leur centre est le centre de gravité demandé.

172. Théorème. — *Si une surface homogène a un centre de figure, ce point est son centre de gravité.*

En effet, considérons une surface homogène ayant un centre de figure O (fig. 97). Prenons dans cette surface une portion de surface M assez petite pour qu'on puisse la confondre avec un point; il existe, dans la surface, une surface M′ symétrique de M par rapport au point O.

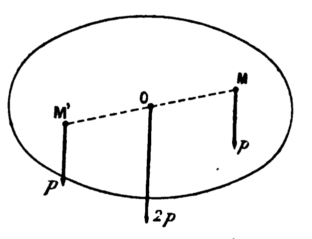


Fig. 97.

Les surfaces M et M′ étant symétriques sont égales, elles ont même poids p et ces deux poids ont une résultante $2p$ appliquée au point O, milieu de la droite qui joint les deux points M et M′.

On peut ainsi décomposer toute la surface en points deux à deux symétriques par rapport au point O et

on obtient ensuite le centre de gravité en cherchant le centre de tous les poids $2p$ appliqués en O. Ce centre de gravité est donc ce point O.

173. Applications. — *Le centre de gravité d'un parallélogramme est le point d'intersection des diagonales.*

Le centre de gravité de l'aire d'un cercle est le centre de ce cercle.

Le centre de gravité de l'aire d'une ellipse est le centre de cette ellipse.

174. Théorème. — *Si une surface homogène admet un diamètre, le centre de gravité de la surface est situé sur ce diamètre.*

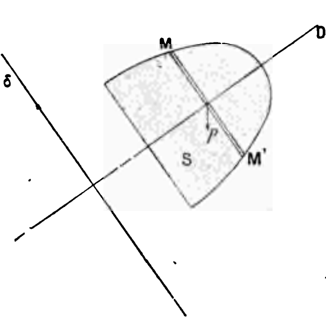


Fig. 98.

On dit qu'une surface S admet un *diamètre, conjugué des cordes parallèles à une direction donnée* δ, s'il existe une droite D qui partage en deux parties égales toutes les cordes parallèles à cette direction δ (fig. 98).

Ceci posé, on peut décomposer la surface S qui admet le diamètre D en bandes très fines parallèles à la direction δ. Ces bandes peuvent être assez étroites pour être confondues avec des droites. Soit MM′ une de ces bandes de poids p : son centre de gravité est au point I, milieu de MM′ et, par définition du diamètre, I est sur D.

Pour avoir le centre de gravité de la surface S, il

faut trouver le centre des forces parallèles p. Comme toutes ces forces p ont leurs points d'application sur le diamètre D, le centre de ces forces parallèles sera situé sur la droite D (n° **162**).

175. ***Application. — Centre de gravité de l'aire d'un triangle.*** — Soit le triangle ABC (fig. 99).

Menons la médiane AM ; cette médiane est le diamètre conjugué des cordes parallèles à BC puisqu'elle partage en deux parties égales toutes les cordes parallèles à BC ; elle contient par suite le centre de gravité du triangle.

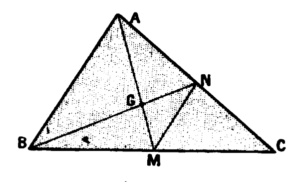


Fig. 99.

De même, ce centre de gravité se trouve également sur la médiane BN, donc il est situé en G point de rencontre de cette médiane avec la première.

Le centre de gravité de l'aire d'un triangle est donc le point de concours des médianes.

Or, si l'on joint MN, on forme un triangle MNG semblable au triangle ABG puisque MN est parallèle à AB comme joignant les milieux des côtés AC, BC et l'on a la proportion

$$\frac{MG}{AG} = \frac{MN}{AB} = \frac{\frac{AB}{2}}{AB} = \frac{1}{2};$$

donc

$$MG = \frac{1}{2} AG = \frac{1}{3} AM.$$

Ainsi, *le centre de gravité de l'aire d'un triangle est situé sur l'une quelconque des médianes de ce triangle, au tiers de cette médiane à partir du côté qu'elle partage en deux parties égales.*

176. *Centre de gravité de l'aire d'un trapèze*. — Soit le trapèze ABCD (fig. 100).

Le centre de gravité doit être situé sur la droite HK qui joint les milieux des bases car cette droite, qui divise en deux parties égales toute droite parallèle aux bases, est un diamètre.

Il reste à déterminer sa position sur cette droite Pour cela, menons la diagonale BD, joignons DH, BK; prenons $HE = \frac{HD}{3}$, $KF = \frac{KB}{3}$ et joignons EF. Le point G de rencontre de cette droite avec HK est le centre de gravité du trapèze, car les points E et F étant les centres de gravité des aires des triangles ABD et BDC le centre de gravité du trapèze doit se trouver sur EF.

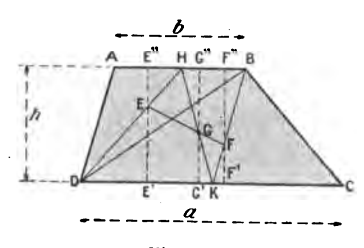


Fig. 100.

Ceci fournit une première construction du centre de gravité.

On décompose le trapèze en deux triangles en menant une diagonale. Le centre de gravitée est à l'intersection de la droite qui joint les centres de gravité des deux triangles et de la droite qui joint les milieux des deux bases.

177. — Déterminons le rapport des segments GK, GH en lesquels le point G partage la ligne HK. A cet effet, supposons appliquées en F et E, deux forces perpendiculaires au plan de la figure, de même sens et respectivement proportionnelles aux aires des deux triangles DBC et ABD. Ces deux forces auront une résultante proportionnelle à l'aire du trapèze et appliquée en G. Imaginons un plan pas-

sant par DC et mené perpendiculairement au plan de la figure. Appliquons le théorème des moments de forces parallèles par rapport à un plan (n° **59**). Soient a et b les bases du trapèze, h sa hauteur : $\left(\frac{a+b}{2}\right) h$ est le poids du trapèze appliqué au point G (en supposant la densité égale à 1), $\frac{a}{2} h$ le poids du triangle BDC, et $\frac{b}{2} h$ le poids du triangle ADB appliqués en F et E. Le théorème des moments donne :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) h.\,GG' = \frac{a}{2}\,h.\,FF' + \frac{b}{2}\,h.\,EE', \qquad (1)$$

GG′, FF′, EE′ étant les perpendiculaires abaissées de G, E, F sur DC.

Cette égalité (1) peut se simplifier et s'écrit

$$(a+b)\,GG' = a.\,FF' + b.\,EE'. \qquad (2)$$

Calculons FF′ et EE′. Pour cela prolongeons les perpendiculaires EE′, GG′, FF′ jusqu'à la base AB en E″, G″, F″. Les deux triangles semblables FKF′, FF″B donnent

$$\frac{FF'}{FF''} = \frac{FK}{FB} = \frac{1}{2}.$$

On a donc

$$FF' = \frac{FF''}{2} = \frac{1}{3} F'F'' = \frac{h}{3}.$$

Les triangles semblables DEE′, EE″H donnent de même

$$\frac{EE'}{EE''} = \frac{ED}{EH} = \frac{2}{1};$$

On a donc

$$EE' = 2\,EE'' = \frac{2}{3}\,E'E'' = \frac{2}{3}\,h,$$

et l'égalité (2) devient

$$(a+b)\,GG' = a\,\frac{h}{3} + b\,\frac{2}{3}\,h = \frac{h}{3}\,(a+2b). \quad (3)$$

Concevons maintenant qu'on mène par la petite base AB un plan perpendiculaire à celui de la figure et prenons les moments, par rapport à ce plan, des forces appliquées en G, E, F ; nous aurons, en appliquant encore le théorème des moments :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) h.\,GG'' = \frac{a}{2}\,h.\ FF'' + \frac{b}{2}\,h.EE''.$$

ou, en simplifiant,

$$(a+b)\ GG'' = a\,FF'' + b.\,EE''. \quad (4)$$

Mais on a

$$FF'' = 2\,FF' = \frac{2}{3}\,F'F'' = \frac{2}{3}\,h,$$

$$EE'' = \frac{EE'}{2} = \frac{1}{3}\,E'E'' = \frac{1}{3}\,h,$$

et l'égalité (4) s'écrit :

$$(a+b)\,GG'' = a.\,\frac{2}{3}\,h + b.\,\frac{1}{3}\,h = \frac{h}{3}\,(2a+b). \quad (5)$$

Divisant membre à membre les égalités (3) et (5), il vient

$$\frac{GK}{GH} = \frac{GG'}{GG''} = \frac{a+2b}{2a+b}. \quad (6)$$

On déduit de là une seconde construction pour déterminer la position du centre de gravité d'un trapèze ABCD :

Ayant joint entre eux (fig. 101) *les milieux* I *et* K *des bases de la figure, on prolonge la petite base d'une*

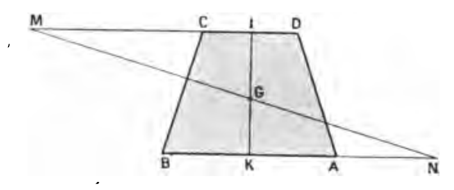


Fig. 101.

longueur CM égale à la grande base et celle-ci, dans le sens opposé, d'une longueur AN égale à la petite base. On joint MN et le point G où cette ligne rencontre la droite IK est le centre de gravité demandé.

En effet, les triangles semblables NGK, MIG donnent :

$$\frac{GK}{GI} = \frac{KN}{IM} = \frac{\frac{a}{2} + b}{\frac{b}{2} + a} = \frac{a + 2b}{b + 2a}.$$

178. *Détermination des centres de gravité des aires planes par la statique graphique.* — Soit une aire plane quelconque homogène (fig. 102) et proposons-nous de chercher son centre de gravité.

Pour cela partageons cette aire en un certain nombre de parties par des parallèles à une direction donnée; parallèles assez voisines pour que ces portions puissent être confondues avec des triangles ou des trapèzes. Nous connaissons la position du centre de gravité de chacun des trapèzes ou triangles en lesquels

est décomposée l'aire plane. Soient g_1, g_2, g_3, etc., ces centres de gravité : appliquons en chacun d'eux un poids égal ou proportionnel au poids de la surface correspondante.

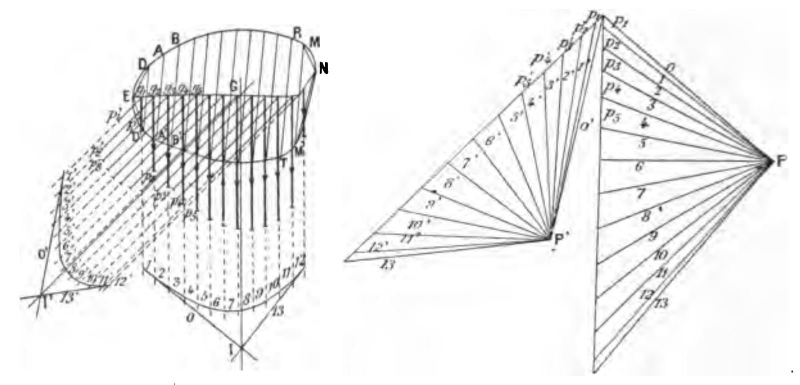


Fig. 102.

Pour plus de commodité, on peut prendre les parallèles équidistantes; les divers trapèzes en lesquels on a décomposé la surface ont alors même hauteur et leurs aires sont proportionnelles à la somme de leurs bases, et les triangles ont aussi des surfaces proportionnelles à leur base.

Le centre de gravité de l'aire se trouve sur la ligne d'action de la résultante des poids partiels p_1, p_2, p_3... appliqués aux points g_1, g_2, g_3.....

On construit cette résultante au moyen d'un dynamique et d'un funiculaire o, 1, 2,... : l'intersection des rayons initial et final donne le point I qui est un point de la direction de la ligne d'action de la résultante ; il suffit donc de mener par I une parallèle aux poids partiels pour avoir la direction du poids de l'aire donnée ; le centre de gravité est sur cette ligne GI.

Or, la position du centre de gravité étant indépen-

dante de la direction des forces (nº **163**), changeons la direction des poids en les faisant tourner tous d'un même angle, dans le même sens et en les laissant appliqués aux centres de gravité partiels $g_1, g_2, g_3, \ldots$ Soient $p'_1 p'_2, p'_3, \ldots$.. les nouvelles positions des poids partiels. On recommence le dynamique et le funiculaire avec ces nouvelles directions de poids; la nouvelle ligne d'action I'G de la résultante contient le centre de gravité de l'aire donnée. Le centre de gravité devant se trouver sur IG et sur I'G se trouve à leur point d'intersection G.

179. Cas particulier. — La construction précédente se simplifie lorsqu'on connaît une ligne sur laquelle se trouve le centre de gravité cherché ; ainsi si l'aire a un diamètre ou un axe de symétrie, le centre de gravité est sur ce diamètre ou sur cet axe et alors le point où la direction de la résultante des poids des aires partielles rencontre cette droite donne la position du centre de gravité.

Il n'y a qu'une construction à faire.

§ 3. — Théorèmes de Guldin

180. ***Théorème I.*** — *La surface engendrée par une portion de ligne plane, tournant autour d'un axe situé dans son plan et qui ne la traverse pas, est égale au produit de la longueur de cette ligne par la longueur de la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Le théorème est évident lorsque la portion de ligne est un segment de droite, car il a été démontré en géométrie que la surface engendrée par un segment AB (fig. 103) tournant autour d'un axe xy situé dans

un même plan avec elle, surface qui est la surface latérale d'un tronc de cône, est égale au produit de la longueur de la droite par la longueur de la circonférence que décrit son point milieu G.

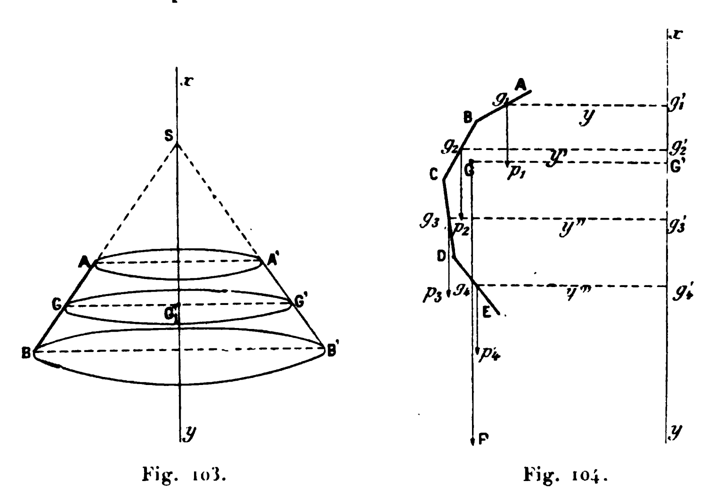


Fig. 103. Fig. 104.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'une ligne brisée plane ABCDE (fig. 104) tournant autour d'un axe xy situé dans son plan et qui ne la traverse pas.

On a, en représentant par y, y', y'', y''', les distances des milieux des côtés AB, BC, CD, DE de la ligne à l'axe xy et par S la surface qu'elle engendre :

$$S = AB.\ 2\pi y + BC.\ 2\pi\, y' + CD.\ 2\pi y'' + DE.\ 2\pi y'''$$

ou

$$S = 2\pi\,(AB.\ y + BC.\ y' + CD.\ y'' + DE.\ y'''), \quad (1)$$

car la surface S engendrée par ABCDE est égale à la somme des surfaces engendrées séparément par AB, BC, CD, DE.

Ceci posé, désignons par G le centre de gravité de

la ligne brisée considérée comme une ligne pesante et homogène ; par g_1, g_2, g_3, g_4 les centres de gravité des droites AB, BC, CD, DE, et menons GG′ perpendiculaire à l'axe. Soit Y la distance de G à l'axe.

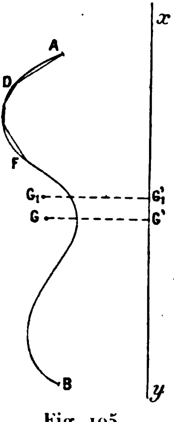


Fig. 105.

Supposons que l'axe soit vertical, et appliquons aux points g_1, g_2, g_3, g_4 des poids p_1, p_2, p_3, p_4 égaux où proportionnels aux longueurs des côtés. Ces poids ont une résultante qui est le poids total P de la ligne brisée, égal ou proportionnel au périmètre de cette ligne et appliqué au centre de gravité G.

Prenons les moments par rapport au plan mené par xy perpendiculairement au plan de la figure, on a (n° 59),

$$P.Y = AB.\,y + BC.\,y' + CD.\,y'' + DE.\,y'''. \qquad (2)$$

Le second membre de cette égalité n'est autre chose que la quantité entre parenthèses de la relation (1), qui peut donc s'écrire :

$$S = 2\pi.\,P\,Y = P.\ 2\pi\,Y$$
$$S = (AB + BC + CD + DE)\,2\pi Y,$$

Le théorème est donc démontré pour une ligne brisée.

Passons au cas d'une ligne courbe. Considérons un arc de courbe plane AB (fig. 105) et un axe xy situé dans son plan et qui ne la traverse pas. Inscrivons dans cet arc de courbe une ligne brisée quelconque ADEF..... Prenons le centre de gravité G_1 de cette ligne brisée et soit P son périmètre.

La surface engendrée par la ligne brisée, en tournant autour de xy, est

$$S_1 = P.\, 2\pi\, G_1G'_1.$$

Supposons qu'on double indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée, de façon que chaque côté tende vers zéro : à la limite, la ligne brisée devient la courbe AB, le périmètre P devient la longueur l de l'arc AB, G_1 se confond avec le centre de gravité G de l'arc et S_1 devient la surface S engendrée par l'arc en tournant; on a donc

$$S = l.2\pi\, GG'.$$

181. ***Application. — Centre de gravité d'un arc de cercle.*** — Soit AB un arc de cercle (fig. 106). Le centre de gravité de cet arc est d'abord situé sur le rayon OC aboutissant au milieu de l'arc, car ce rayon est un axe de symétrie. Pour déterminer la position qu'il occupe sur OC, supposons que l'arc tourne autour d'un diamètre xy parallèle à la corde qui le soustend, la surface engendrée S est celle d'une zone ayant pour hauteur la corde et l'on a

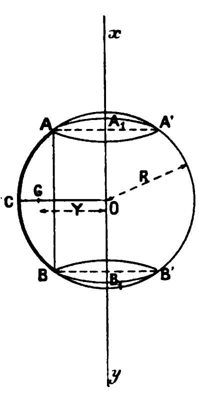


Fig. 106.

$$S = 2\pi R \times \textit{corde}\ AB.$$

Appliquant le théorème de Guldin, on a, en nommant Y la distance du centre de gravité de l'arc au diamètre,

$$S = \textit{arc}\ AB \times 2\pi Y.$$

Égalant ces deux valeurs de S, il vient

$$2\pi R \times \textit{corde}\ AB = \textit{arc}\ AB \times 2\pi Y$$

d'où

$$Y = \frac{\textit{corde}\ AB \times R}{\textit{arc}\ AB}.$$

Le centre de gravité d'un arc de cercle est situé sur le rayon aboutissant au milieu de l'arc, à une distance du centre égale à la quatrième proportionnelle entre l'arc, la corde et le rayon du cercle.

182. ***Théorème II.*** — *Le volume engendré par une aire plane, tournant autour d'un axe situé dans son plan et qui ne la traverse pas, est égal au produit de cette aire par la longueur de la circonférence que décrit son centre de gravité.*

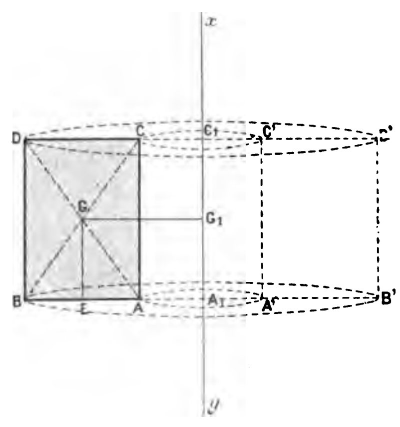


Fig. 107.

Soit d'abord (fig. 107) un rectangle ABDC tournant autour de l'axe xy parallèle à AC. Le volume V engendré par ce rectangle est la différence des volumes des deux cylindres BD B'D' et AC C'A'. On

a donc

$$V = \pi \overline{A_1B}^2 \times AC - \pi \overline{A_1A}^2 \times AC.$$

$$V = \pi(\overline{A_1B}^2 - \overline{A_1A}^2) AC. \qquad (1)$$

Or,

$$\overline{A_1B}^2 - \overline{A_1A}^2 = (A_1B + A_1A)(A_1B - A_1A)$$

et

$$A_1B - A_1A = AB.$$

Soit G le centre de gravité du rectangle ABDC, menons GG_1 perpendiculaire sur xy et GE perpendiculaire sur AB ; le point E est le milieu de AB. On a

$$A_1B = A_1E + EB = G_1G + EB,$$
$$A_1A = A_1E - EA = G_1G - EB;$$

additionnant ces deux égalités, il vient

$$A_1B + A_1A = 2 . G_1G.$$

Et l'égalité (1) devient

$$V = 2\pi . G_1G \times AB \times AC$$

ou enfin

$$V = \text{surf.} (ABCD) \times 2\pi G_1G.$$

Ce qui démontre le théorème dans ce cas.

Soit maintenant une aire plane de forme quelconque (fig. 108) et un axe xy situé dans son plan et qui ne la traverse pas. Découpons cette aire au moyen de droites perpendiculaires à l'axe xy ; nous formons ainsi une série de rectangles inscrits dans l'aire et ayant un côté parallèle à l'axe.

Soient s_1, s_2, s_3,... les aires de ces rectangles par-

tiels; y_1, y_2, y_3,... les distances de leurs centres de gravité à l'axe et considérons la somme V_1 des volumes engendrés par tous ces rectangles en tournant autour de xy, on a

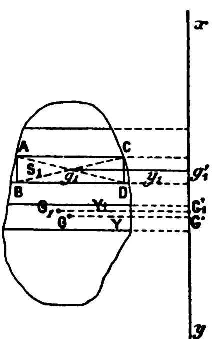


Fig. 108.

$$V_1 = 2\pi y_1 s_1 + 2\pi y_2 s_2 + \ldots,$$
$$V_1 = 2\pi(y_1 s_1 + y_2 s_2 + \ldots). \quad (1)$$

Ceci posé, soient G_1 le centre de gravité de la surface formée par tous les rectangles et S_1 la surface de tous ces rectangles :

$$S_1 = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots.$$

Appelons Y_1 la distance de G_1 à l'axe ; appliquons aux points g_1, g_2, g_3,.... des poids p_1, p_2, p_3,.... égaux ou proportionnels aux surfaces correspondantes des rectangles partiels. Ces poids ont une résultante appliquée en G_1 et égale ou proportionnelle à la surface S_1.

Imaginons que ces poids soient parallèles à l'axe xy et prenons les moments par rapport au plan mené par xy perpendiculaire au plan de la figure (n° **59**), on a

$$s_1 y_1 + s_2 y_2 + \ldots = Y_1 S_1. \quad (2)$$

La parenthèse de l'égalité (1) n'est autre chose que le premier membre de l'égalité (2), on a donc finalement

$$V_1 = 2\pi Y_1 S_1.$$

Ceci posé, imaginons que l'on augmente indéfiniment le nombre des rectangles en lesquels on a décomposé l'aire de façon que leurs hauteurs tendent vers zéro : la somme des aires des rectangles devient

à la limite la surface S donnée, le centre de gravité G_1 devient le centre de gravité G de l'aire et le volume engendré V_1 devient le volume V engendré par l'aire en tournant ; on a donc, à la limite,

$$V = S \times 2\pi Y,$$

Y étant la distance de G à l'axe.

183. ***Application. — Centre de gravité d'un secteur circulaire.*** — Soit (fig. 109) le secteur circulaire AOB. Son centre de gravité est d'abord situé sur le rayon OC aboutissant au milieu C de l'arc AB, car ce rayon est un axe de symétrie.

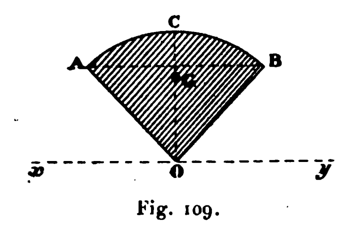


Fig. 109.

Pour fixer, la position de ce centre G sur OC, faisons tourner le secteur autour d'un axe xy passant par O et perpendiculaire à OC. Le volume V engendré est celui d'un secteur sphérique qui, comme on sait, est égal au produit de la zone qui lui sert de base par le tiers du rayon R :

$$V = \frac{1}{3} R. 2\pi R. \textit{corde}\ AB.$$

D'autre part, d'après le théorème de Guldin, on a :

$$V = \textit{Surf.}\ AOB \times 2\pi OG = \frac{1}{2} R \times \textit{arc}\ AB \times 2\pi. OG.$$

En égalant les deux valeurs de V il vient :

$$\frac{2}{3} \pi R^2. \textit{corde}\ AB = \pi R. \textit{arc}\ AB. OG.$$

On en tire :

$$OG = \frac{\textit{corde}\ AB \times \frac{2}{3} R}{\textit{arc}\ AB}.$$

Le centre de gravité d'un secteur circulaire est situé sur le rayon qui partage l'angle du secteur en deux parties égales, à une distance du centre égale à la quatrième proportionnelle entre l'arc, sa corde et les deux tiers du rayon.

184. Exercice. — *Trouver le centre de gravité de la surface* ABCD *formée par deux rayons* OD, OC *et deux arcs de cercle* AB, DC *de même centre* O (fig. 110).

Soient g_1 et g_2 les centres de gravité des secteurs circulaires AOB et DOC. Le centre de gravité G cherché est sur l'axe de symétrie OM en un point G tel que le poids appliqué en G soit égal à la différence des poids appliqués en g_1 et g_2.

Au point g_1 est appliqué un poids p_1 égal à la surface AOB ; au point g_2 est appliqué un poids p_2 égal à la surface OCD et de sens contraire au premier poids ; composons ces deux forces parallèles et de sens contraires et le point d'application G de la résultante donnera le centre de gravité cherché.

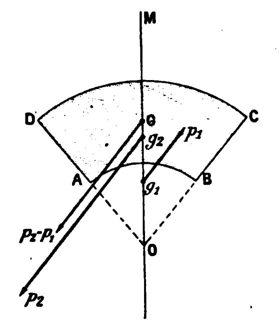


Fig. 110.

185. ***Applications.*** — *Volume engendré par un cercle tournant autour d'un axe situé dans son plan et qui ne le rencontre pas* (*Volume du tore*).

Soit un cercle C (fig. 111) de rayon R tournant autour de l'axe xy et soit CC′ la perpendiculaire abaissée de C sur xy, on a (n° **182**)

$$V = \pi R^2 \times 2\pi CC',$$
$$V = 2\pi^2 a R^2,$$

en posant $CC' = a$.

Volume d'un anneau circulaire dont la section est une ellipse.

Soit une ellipse d'axes a et b (fig. 112) tournant autour de l'axe xy et soit OO′ la perendiculaire

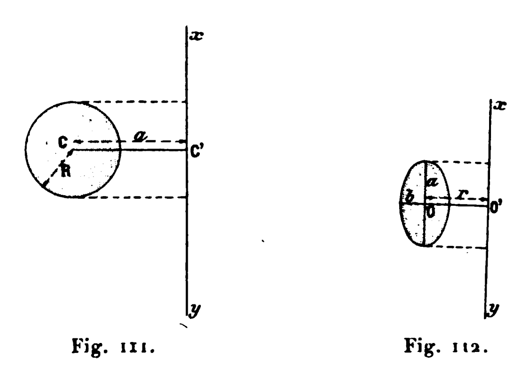


Fig. 111. Fig. 112.

abaissée du centre O sur xy, on a, en vertu du théorème de Guldin,

$$V = \pi ab \times 2\pi OO',$$
$$V = 2\pi^2 abr,$$

en posant $OO' = r$.

§ 4. — Centres de gravité des volumes

186. ***Théorème.*** — *Si un volume homogène admet un centre de figure, ce point est le centre de gravité du volume.*

Remarquons d'abord que deux tétraèdres symétriques ont des volumes égaux.

Soient deux tétraèdres SABC et SA′B′C′ (fig. 113) symétriques par rapport à leur sommet commun. Ils ont même volume. En effet, les bases ABC, A′B′C′

sont égales; SH perpendiculaire au plan ABC est perpendiculaire au plan A′B′C′ parallèle à ABC; les hauteurs SH, SH′ sont égales, puisque les points H et H′ sont symétriques par rapport au point S. Ces deux tétraèdres ayant même hauteur et des bases égales ont des volumes égaux.

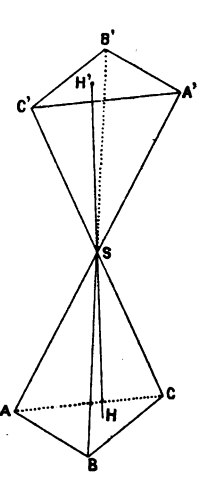


Fig. 113.

Ceci posé, considérons un volume admettant un centre de figure O (fig. 114); prenons une portion de ce volume, assez petite pour être confondue avec un point M. Admettons que cette portion soit un petit tétraèdre et considérons le petit tétraèdre M′ symétrique de M par rapport à O. Ces deux tétraèdres ont même volume et par conséquent même poids. La résultante 2 p de ces deux poids sera appliquée au milieu O de la droite qui joint les deux points, M et M′, et O est le centre de ces deux forces parallèles.

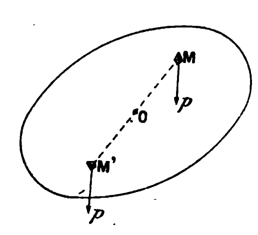


Fig. 114.

On peut décomposer le volume tout entier en un très grand nombre de petites portions deux à deux symétriques par rapport au point O, et le centre de chaque couple de poids est le point O. Le centre total, qui est le centre de gravité cherché, est donc O.

187. Applications. — *Le centre de gravité d'un parallélépipède est à l'intersection des diagonales.*

Le centre de gravité d'une sphère est le centre de cette sphère.

188. Théorème. — *Lorsqu'un volume homogène admet un plan diamétral, le centre de gravité de ce volume est situé dans ce plan diamétral.*

On dit qu'un volume admet un *plan diamétral conjugué d'une direction de cordes* s'il existe un plan

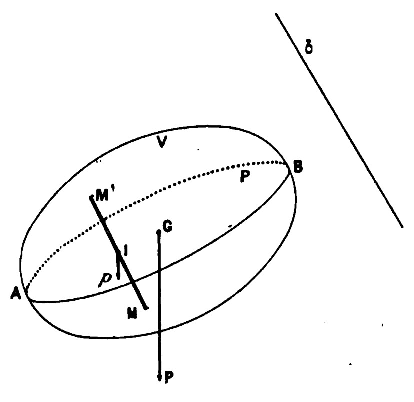


Fig. 115.

qui partage en deux parties égales toutes les cordes parallèles à cette direction.

Considérons un volume V qui admet un plan diamétral P (fig. 115) conjugué des cordes parallèles à la direction δ. Le milieu I de la corde MM' parallèle à δ est, par hypothèse, dans le plan diamétral P.

On peut considérer la ligne MM' comme un cylindre très mince, homogène, réduit à une droite homogène; le poids p de cette droite est appliqué en son milieu I.

Pour avoir le centre de gravité du volume V, on peut le décomposer en un grand nombre de petits cylindres de même nature que MM' et tous parallèles

à MM′. Les centres de gravité de toutes ces droites sont situés dans le plan diamétral P et pour avoir le centre de gravité du volume V, il faut chercher le centre des forces parallèles telles que *p*. Ce centre est dans le plan diamétral et par conséquent (nº **161**) le centre de gravité du volume donné est dans le plan diamétral. Ce qu'il fallait démontrer.

189. ***Centre de gravité d'un tétraèdre***. — Soit le tétraèdre ABCD (fig. 116). Le plan passant par AB et le point E, milieu de l'arête opposée DC est un plan diamétral car il partage en deux parties égales toutes les cordes parallèles à DC; il contient donc le centre de gravité du solide. Il en est de même du plan mené par AD et le milieu F de BC. Ces deux plans se coupent suivant la droite AI qui contient donc le centre de gravité du solide.

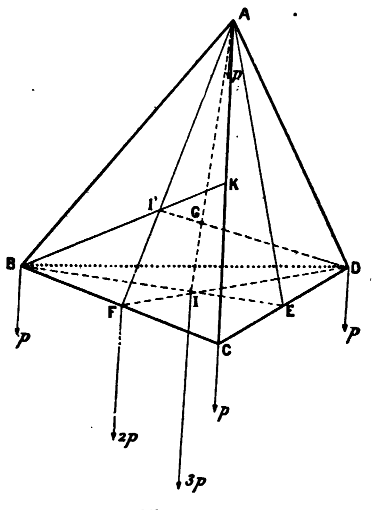


Fig. 116.

Mais le point I est le centre de gravité de la base BCD puisque BE et DF sont deux médianes de la base et qu'elles se rencontrent en I.

Le centre de gravité cherché est donc sur la droite qui joint le sommet A au centre de gravité I de la face opposée BCD.

Pour une raison semblable, ce centre de gravité doit également se trouver sur la droite DI′ qui joint

le sommet D au centre de gravité I′ de la face ABC.

Il est donc au point G de rencontre des droites AI, DI′.

Donc *le centre de gravité d'un tétraèdre est situé au point de rencontre des droites qui joignent les sommets aux centres de gravité des faces opposées.*

190. — Pour fixer la position de ce centre de gravité sur AI, nous allons d'abord prouver que si on applique aux quatre sommets du tétraèdre quatre poids égaux, le *centre* de ces quatre forces parallèles, coïncide avec le centre de gravité du volume.

En effet, les poids p appliqués en B et C ont une résultante $2p$ appliquée en F milieu de BC; composons le poids p appliqué en D avec la résultante $2p$ que nous venons de trouver et nous obtenons une résultante $3p$ appliquée en I. En effet, ID $=$ 2IF et on a la relation :

$$\frac{\text{ID}}{\text{IF}} = \frac{2p}{p}.$$

Le centre des quatre forces parallèles s'obtient en composant la résultante $3p$ avec le poids p appliqué en A, il se trouve donc sur la droite AI.

On démontrerait de même qu'il se trouve sur la droite DI′ en composant les poids appliqués en B, C, A dont la résultante est appliquée en I′ et cette résultante avec le poids appliqué en D. Il en résulte que la résultante des quatre poids p, devant se trouver sur AI et sur DI′, est à leur intersection G.

Ceci posé, le point G étant le point d'application de la résultante de deux forces, l'une $3p$ appliquée en I et l'autre p appliquée en A, on a :

$$\frac{\text{GI}}{\text{GA}} = \frac{p}{3p} = \frac{1}{3},$$

d'où $$GA = 3GI$$

et $$AI = 4GI \quad \text{et} \quad GI = \frac{1}{4} AI.$$

Le point G est donc au quart de AI.

Le centre de gravité d'un tétraèdre se trouve sur la droite qui joint un sommet au centre de gravité de la face opposée au quart de cette droite à partir de la face.

191. Théorème. — *Lorsque le lieu géométrique des centres de gravité des sections faites dans un volume homogène par des plans parallèles est une droite, le centre de gravité de ce volume est situé sur cette droite.*

Soit V (fig. 117) un volume et supposons que le lieu géométrique des centres de gravité des sections de ce volume par des plans parallèles au plan P soit une droite D. Coupons ce volume en tranches très minces par des plans parallèles au plan P. D'après notre hypothèse, le centre de gravité g d'une telle tranche T se trouve sur D. Soit p le poids de cette tranche. Pour avoir le centre de gravité G du volume V il faut chercher le centre des forces parallèles telles que p ; or, comme les points d'application g de toutes les forces p sont situés sur la droite D, le centre G de ces forces parallèles (n° **162**) sera également situé sur cette droite.

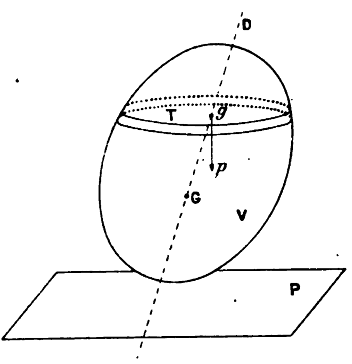


Fig. 117.

192. ***Centre de gravité d'un prisme.*** — Considérons (fig. 118) un prisme quelconque

ABCDE A'B'C'D'E'.

Il est clair que la section *abcde* de ce prisme par un plan parallèle aux deux bases est égale à chacune de ces deux bases. Lorsque le plan de cette section se déplace parallèlement au plan des deux bases le lieu géométrique du centre de gravité g de la section est évidemment la droite $g_1 g_2$, parallèle aux arêtes latérales, qui joint les centres de gravité des deux bases. D'après le théorème précédent, le centre de gravité G du prisme se trouve sur cette droite. D'autre part, le plan de la section *moyenne* A''B'' C'' D'' E'', équidistante des deux bases, est un plan diamétral. Car il partage en deux parties égales toutes les cordes parallèles aux arêtes latérales. Le centre de gravité G est donc, en vertu du théorème du n° **188**, situé dans ce plan.

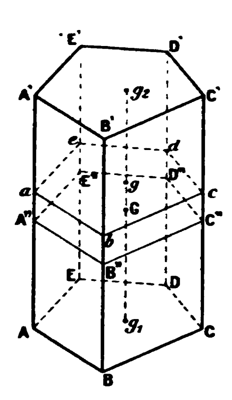


Fig. 118.

Le centre G se trouve donc à l'intersection du plan de la section moyenne et de la droite $g_1 g_2$; c'est donc le milieu de $g_1 g_2$ et aussi le centre de gravité de la section moyenne, Donc :

Le centre de gravité d'un prisme est le centre de gravité de sa section moyenne par un plan parallèle aux deux bases et équidistant de ces deux bases.

§ 5. — Moments d'inertie des aires planes.

193. ***Définition.*** — Etant donnés (fig. 119) une aire plane S et un axe xx' situé dans le plan de cette

aire, imaginons que l'on décompose cette aire en un très grand nombre de morceaux très petits. Prenons un de ces morceaux, supposé assez petit pour pouvoir être confondu avec un point M, et appelons ω sa surface. Abaissons de M la perpendiculaire MM′ sur xx' et soit r la distance MM′. Formons le produit ωr^2 et faisons la somme de tous les produits analogues pour tous les morceaux en lesquels nous avons décomposé la surface S. Soit

Fig. 119.

$$\omega r^2 + \omega' r'^2 + \ldots.$$

cette somme que nous désignerons par abréviation par la notation

$$\sum \omega r^2,$$

le signe $\sum$ signifiant qu'il faut faire une somme d'un très grand nombre de produits analogues à ωr^2.

Par définition, le moment d'inertie de la surface S par rapport à l'axe xx' est la limite de $\sum \omega r^2$ lorsque tous les morceaux en lesquels on a décomposé la surface tendent tous vers zéro.

Le moment d'inertie d'une surface se rencontre dans l'étude de la résistance des matériaux.

194. Théorème. — *Si on décompose une surface en plusieurs morceaux, le moment d'inertie de la surface entière par rapport à un axe situé dans son plan est égal à la somme des moments d'inertie de chaque morceau.*

En effet, considérons (fig. 120) une surface S et partageons-la en trois morceaux, par exemple, S_1, S_2, S_3. Soit xx' un axe qui rencontre ou ne rencontre pas la surface. Appelons I, I_1, I_2, I_3 les moment d'inertie des surfaces S, S_1, S_2, S_3 par rapport à xx' et reportons-nous à la définition : on a

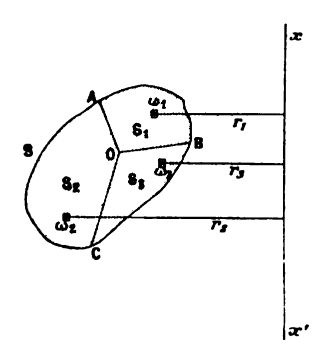


Fig. 120.

$$I_1 = lim \sum \omega_1 r_1^2,$$

$$I_2 = lim \sum \omega_2 r_2^2,$$

$$I_3 = lim \sum \omega_3 r_3^2,$$

en décomposant chaque surface S_1, S_2, S_3, en un grand nombre de morceaux ω_1, ω_2, ω_3 à des distances r_1, r_2, r_3 de l'axe xx'.

Pour avoir le moment d'inertie I de la surface S, il faut, par définition, décomposer la surface en un grand nombre de morceaux. Nous l'avons déjà fait en décomposant chaque surface S_1, S_2, S_3, et par conséquent les petits morceaux en lesquels la surface S se trouve décomposée sont la somme des morceaux en lesquels on a décomposé S_1, S_2, S_3 ; on a par suite

$$I = lim \left[\sum \omega_1 r_1^2 + \sum \omega_2 r_2^2 + \sum \omega_3 r_3^2 \right].$$

Chaque partie de la parenthèse est le moment d'inertie d'un des morceaux S_1, S_2, S_3; on a donc

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

et le théorème est démontré.

195. Théorème. — *Le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe quelconque situé dans son plan est égal au moment d'inertie de la même surface par rapport à un axe parallèle au premier et passant par son centre de gravité augmenté du produit de l'aire de la surface par le carré de la distance des deux axes.*

Considérons une surface S (fig. 121) et soit G son

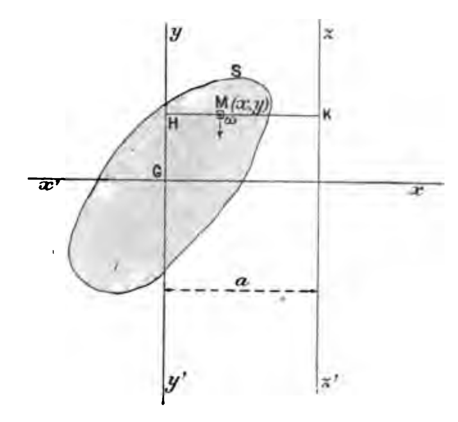


Fig. 121.

centre de gravité. Soient deux axes rectangulaires yy' et xx' passant par G et un axe zz' parallèle à yy'. Prenons, dans la surface S, un petit morceau M de surface ω et abaissons de M la perpendiculaire commune à yy' et zz' qui coupe yy' en H et zz' en K.

Soit I le moment d'inertie de S par rapport à yy' et I' son moment d'inertie par rapport à zz', on a, par définition (n° **193**) :

$$I = lim \sum \omega\, \overline{MH}^2, \qquad (1)$$

$$I' = lim \sum \omega\, \overline{MK}^2. \qquad (2)$$

Or le segment $\overline{HM}$ est l'abscisse du point M et si x, y sont les coordonnées de M par rapport aux axes xx' et yy', on a

$$\overline{HM} = x.$$

Soit a la distance des deux axes yy' et zz', on a, en vertu du théorème de Chasles, en grandeur et en signe,

$$\overline{MK} = \overline{HK} - \overline{HM}$$

ou

$$\overline{MK} = a - x.$$

Les relations (1) et (2) deviennent alors

$$I = lim \sum \omega x^2, \tag{3}$$

$$I' = lim \sum \omega (a - x)^2,$$

$$I' = lim \sum (\omega a^2 - 2\,\omega a x + \omega x^2),$$

$$I' = lim \left[\sum \omega a^2 - \sum 2\,\omega a x + \sum \omega x^2 \right] \tag{4}.$$

Le moment d'inertie I' se compose de trois parties. Étudions-les séparément: $lim \sum \omega x^2$ est le moment d'inertie I de la figure S par rapport à l'axe yy'.

$$\sum \omega a^2 = \omega a^2 + \omega' a^2 + \omega' a^2 + \ldots.$$

ω, ω', ω'',... étant les divers morceaux en lesquels on a décomposé S. En mettant a^2 en facteur ceci s'écrit:

$$lim \sum \omega a^2 = a^2 (\omega + \omega' + \omega'' + \ldots)$$

ou

$$lim \sum \omega a^2 = a^2 \times S.$$

Enfin

$$\sum 2\, a\omega x = 2a\omega x + 2a\omega' x' + \ldots\ldots ,$$

$$\sum 2\, a\omega x = 2\, a\,(\omega x + \omega' x' + \ldots),$$

$$\sum 2\, a\omega x = 2\, a \sum \omega x.$$

Démontrons que $\sum \omega x = 0$.

Imaginons qu'à chaque morceau M on applique un poids égal à la surface ω du morceau, la résultante de tous ces poids est le poids de la surface S qui est appliqué au centre de gravité G. Considérons un plan perpendiculaire au plan de la figure et passant par l'axe yy' et appliquons le théorème des moments (nº 59) par rapport à ce plan auquel nous supposerons les poids parallèles. Le moment du poids de M est $\omega \times \overline{HM}$ ou ωx, en grandeur et en signe, car les moments des poids situés à droite de yy' doivent être pris avec le signe + et ceux des poids situés à gauche de yy' avec le signe —. D'autre part, on a $x = + HM$ si les points sont à droite et $x = - HM$ si les points sont à gauche.

$\sum \omega x$ est donc la somme des moments des poids tels que ω ; cette quantité est égale au moment du poids de la surface S. Or ce moment est nul ; car, l'axe $y'y$ passant par le centre de gravité G, la distance de G à l'axe est nulle.

La relation (4) devient, finalement,

$$I' = a^2 S + I$$

et le théorème est démontré.

196. ***Moment d'inertie du rectangle.*** — LEMME PRÉLIMINAIRE. — Considérons un rectangle très aplati AA′ dont la hauteur est négligeable par rapport à la longueur (fig. 122), et cherchons son moment d'iner-

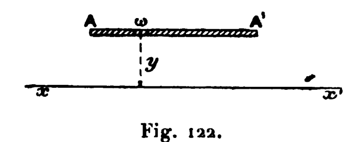


Fig. 122.

tie I par rapport à un axe xx' parallèle à sa grande dimension. Pour cela, découpons le rectangle en un grand nombre de petits morceaux de surface ω, ω′, ω″... ; les distances à l'axe xx' de tous ces petits morceaux sont égales à la distance y du rectangle à xx'. D'ailleurs, on a

$$I = \Sigma\, \omega\, y^2,$$
$$I = \omega y^2 + \omega' y^2 + \omega'' y^2 + \ldots\ldots,$$
$$I = (\omega + \omega' + \omega'' + \ldots\ldots)\, y^2,$$
$$I = s\, y^2,$$

s représentant la somme des aires des petits morceaux, c'est-à-dire la surface du rectangle AA′.

Le moment d'inertie d'un rectangle infiniment aplati par rapport à un axe parallèle, est égal au produit de sa surface par le carré de sa distance à l'axe.

Ce raisonnement suppose que la hauteur du rectangle soit assez petite pour qu'il puisse être confondu avec une droite.

197. Axe parallèle a un côté et passant par le centre de gravité. — Ceci posé, considérons un rectangle quelconque ABCD (fig. 123) ; soit AB $= a$, sa largeur, BD $= b$ sa hauteur et cherchons son moment d'inertie par rapport à l'axe xx' passant par son centre de gravité O et parallèle à sa base. Menons Oy perpendiculaire à Ox.

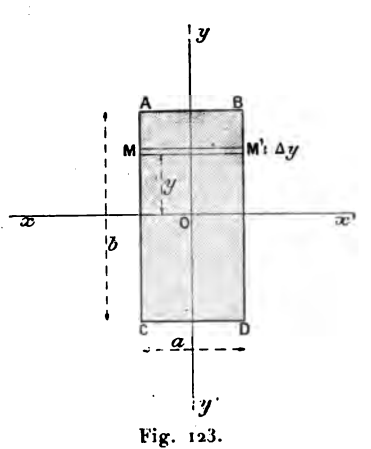


Fig. 123.

Découpons le rectangle en un grand nombre de petits rectangles par des parallèles à Ox. Soit MM' l'un de ces rectangles d'ordonnée y, de largeur a et de hauteur Δy. La surface de ce petit rectangle est $a.\Delta y$, de sorte que son moment d'inertie est, d'après le lemme précédent, $ay^2\,\Delta y$.

Le moment d'inertie de la surface ABCD est (n°**194**) la somme des moments d'inertie de tous les rectangles tels que MM', en lesquels on peut le décomposer par des parallèles à sa base. On a donc :

$$I = lim \sum ay^2\,\Delta y$$

quand Δy tend vers zéro. La somme $\sum$ s'étend depuis le premier petit rectangle CD d'ordonnée $-\frac{b}{2}$ jusqu'au dernier AB d'ordonnée $+\frac{b}{2}$.

Cette somme est une intégrale prise dans des

limites qui sont les valeurs extrêmes de y, c'est-à-dire de $-\frac{b}{2}$ à $\frac{b}{2}$.

On a donc

$$I = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} ay^2\, dy,$$

$$I = \left(\frac{1}{3}\, ay^3\right)_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} = \frac{a}{3}\left(\frac{b}{2}\right)^3 - \frac{a}{3}\left(-\frac{b}{2}\right)^3 = \frac{2\, ab^3}{24},$$

ou :

$$I = \frac{ab^3}{12},$$

qui est le moment d'inertie cherché.

Le moment d'inertie d'un rectangle par rapport à une parallèle à sa base menée par le centre de gravité est le douzième du produit de sa base par le cube de sa hauteur.

198. Axe quelconque parallèle a un coté. — Soit le rectangle ABCD (fig. 124), de largeur a et de hauteur b, dont on cherche le moment d'inertie par rapport à l'axe xx' parallèle à CD situé à une distance d du centre de gravité O.

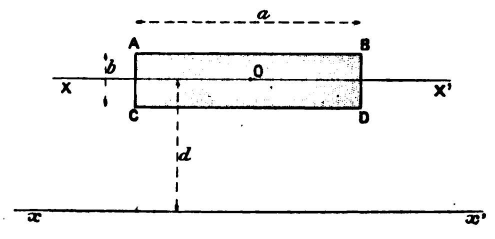


Fig. 124.

Menons par O un axe XX' parallèle à xx'. On a

(n° **195**), I désignant le moment d'inertie par rapport à xx' et I' le moment par rapport XX' :

$$I = I' + Sd^2.$$

Mais, comme nous venons de le voir,

$$I' = \frac{ab^3}{12}$$

et d'ailleurs $S = ab$.

Donc

$$I = \frac{ab^3}{12} + abd^2,$$

ou :

$$I = ab\left[\frac{b^2}{12} + d^2\right], \qquad (1)$$

ce qui est la formule cherchée.

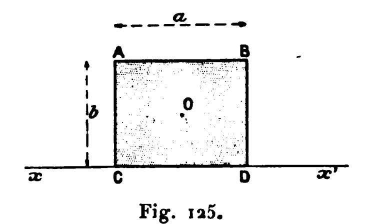


Fig. 125.

199. Cas particulier, moment d'inertie par rapport a un côté (fig. 125). — Dans l'égalité (1) précédente faisons $d = \frac{b}{2}$ et nous obtenons

$$I = ab\left[\frac{b^2}{12} + \frac{b^2}{4}\right] = ab^3\left[\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right];$$

$$I = \frac{ab^3}{3}.$$

Le moment d'inertie d'un rectangle par rapport à sa base est le tiers du produit de sa base par le cube de sa hauteur.

200. ***Moment d'inertie du triangle.*** — AXE PARALLÈLE A UN COTÉ ET PASSANT PAR LE CENTRE DE GRAVITÉ. — Soit le triangle ABC (fig. 126) et soit xx' un axe passant par son centre de gravité O et parallèle à BC. Menons, par le point O, un axe yy' perpendiculaire à xx' et

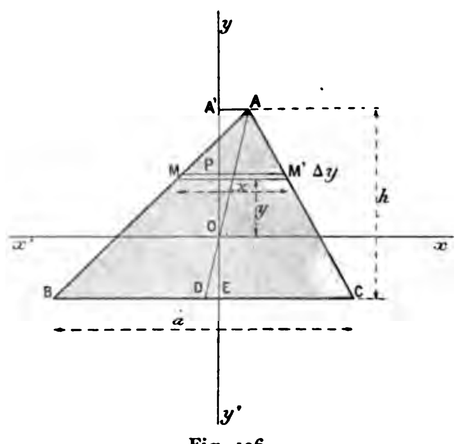


Fig. 126.

découpons le triangle en une série de bandes très étroites par des parallèles à BC. Soit MM' une de ces bandes à une distance y de xx', de largeur z et de hauteur Δy ; sa surface, que l'on peut confondre avec la surface d'un rectangle si la bande est suffisamment petite, est $z\,\Delta y$ et son moment d'inertie par rapport à xx' est (n° 196) $z.\,\Delta y.\,y^2$.

Le moment d'inertie du triangle ABC est alors (n° 194)

$$I = lim \sum z.\,\Delta y.\,y^2,$$

quand les accroissements Δy tendent vers zéro. Or

$$lim \sum zy^2\,\Delta y$$

est une intégrale prise dans des limites qui sont les valeurs extrêmes de y. Soit h la hauteur du triangle et a sa base BC ; le point O étant le centre de gravité, on a

$$OA = \frac{2}{3} AD$$

$$OD = \frac{1}{3} AD.$$

Menons AA′ perpendiculaire à yy', les triangles OAA′ et ODE sont semblables et on a

$$\frac{OE}{OA'} = \frac{OD}{OA} = \frac{\frac{1}{3} AD}{\frac{2}{3} AD} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent

$$OA' = \frac{2}{3} A'E = \frac{2}{3} h,$$

$$OE = \frac{1}{3} h.$$

Les valeurs extrêmes de y sont donc $y = -\frac{h}{3}$ et $y = \frac{2}{3} h$ et on a

$$I = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} zy^2\,dy. \qquad (1)$$

Calculons la valeur de z. Les triangles AMM′ et ABC semblables, donnent

$$\frac{MM'}{BC} = \frac{A'P}{A'E}$$

ou

$$\frac{z}{a} = \frac{OA' - OP}{A'E} = \frac{\frac{2}{3}h - y}{h};$$

d'où on tire

$$z = \frac{a}{h}\left(\frac{2}{3}h - y\right).$$

Cette valeur portée dans l'égalité (1) donne

$$I = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} \frac{a}{h}\left(\frac{2}{3}h - y\right) y^2\, dy,$$

$$I = \frac{a}{h}\int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} \frac{a}{h}\left(\frac{2}{3}h\, y^2 - y^3\right) dy,$$

$$I = \frac{a}{h}\left[\frac{2h}{9}y^3 - \frac{y^4}{4}\right]_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}},$$

$$I = \frac{a}{h}\left[\frac{2h}{9}\,\frac{8h^3}{27} - \frac{4h^4}{81} - \left(-\frac{2h}{9}\cdot\frac{h^3}{27} - \frac{h^4}{4.81}\right)\right]$$

et, en simplifiant,

$$I = \frac{ah^3}{36}.$$

Le moment d'inertie d'un triangle par rapport à une parallèle à sa base menée par le centre de gravité est égal au produit de sa base par le cube de sa hauteur, divisé par 36.

201. AXE QUELCONQUE PARALLÈLE A LA BASE. — Soit le triangle ABC (fig. 127) de base a et de hauteur h

dont on cherche le moment d'inertie par rapport à l'axe xx' parallèle à BC et à une distance d du centre de gravité O. Menons par O un axe XX′ parallèle à xx, on a (n° **195**), en désignant par I et I′ les moments d'inertie par rapport aux axes xx' et XX′,

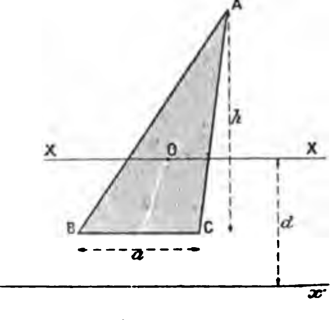


Fig. 127.

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}' + \mathrm{S}d^2.$$

Mais $\mathrm{I}' = \frac{ah^3}{36}$, comme nous venons de le voir et, $\mathrm{S} = \frac{ah}{2}$. On a donc

$$\mathrm{I} = \frac{ah^3}{36} + \frac{ahd^2}{2}$$

$$\mathrm{I} = \frac{ah}{2}\left(\frac{h^2}{18} + d^2\right).$$

202. ***Applications.*** — Connaissant le moment d'inertie d'un triangle ou d'un rectangle par rapport à un axe, on peut trouver facilement les moments d'inertie de surfaces composées de triangles ou de rectangles.

Fig. 128.

Moment d'inertie du simple T. — Soit un simple T (fig. 128). Son moment d'inertie par rapport à l'axe xx' sera égal à la somme des moments d'inertie des deux rectangles ABCD et EFGH (n° **194**). Or, l'axe xx' passant par leurs centres

de gravité, on a, (n° 197).

$$I = \frac{b'a'^3}{12} + \frac{ab^3}{12}.$$

203. Moment d'inertie du double T. — Soit le double T (fig 129). Son moment d'inertie par rapport à l'axe xx' est égal à la somme des moments d'inertie des trois rectangles ABCD, EFGH, KLMN. Ceci donne :

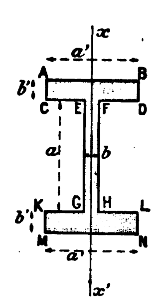


Fig. 129.

$$I = \frac{ab^3}{12} + \frac{2b'a'^3}{12} = \frac{ab^3}{12} + \frac{b'a'^3}{6}$$

204. ***Moment d'inertie polaire.*** — Étant donnée une surface plane S et un point O (fig. 130) dans son plan, à l'intérieur ou à l'extérieur de la surface, imaginons qu'on décompose cette surface en un grand nombre de petits morceaux. Soit ω la surface d'un morceau assez petit pour pouvoir être confondu avec un point ; appelons r la distance OM et formons le produit ωr^2 : le *moment d'inertie polaire* de la surface S *par rapport au point* O est la limite de la somme de tous les produits de la forme ωr^2 relatifs à tous les morceaux qui composent la surface S, lorsque les surfaces ω des morceaux tendent vers zéro.

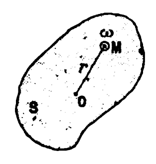


Fig. 130.

On a donc, en désignant par J ce moment d'inertie polaire,

$$J = lim \sum \omega r^2.$$

205. Théorème. — *Le moment d'inertie polaire d'une surface par rapport à un point est la somme des moments d'inertie de la même surface par rapport à deux axes rectangulaires passant par ce point.*

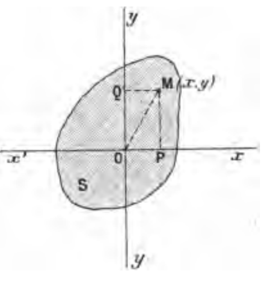


Fig. 131.

Considérons une surface S (fig. 131), un point O et deux axes rectangulaires passant par O. Prenons une portion ω très petite de la surface S, réduite à un point M ; menons les perpendiculaires MP, MQ sur les axes et soient x et y les coordonnées du point M, on a

$$\overline{PM} = y, \quad \overline{QM} = x.$$

Dans le triangle rectangle OMP on a

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2,$$
$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2.$$

Le moment d'inertie I_x de la surface S par rapport à l'axe xx' est

$$I_x = lim \sum \omega . \overline{MP}^2 = lim \sum \omega y^2.$$

De même, le moment d'inertie I_y de la surface S par rapport à l'axe yy' est

$$I_y = lim \sum \omega . \overline{MQ}^2 = lim \sum \omega x^2.$$

Faisons la somme, il vient :

$$I_x + I_y = lim \sum \omega x^2 + lim \sum \omega y^2,$$
$$I_x + I_y = lim \sum \omega (x^2 + y^2),$$
$$I_x + I_y = lim \sum \omega . \overline{OM}^2.$$

Mais $lim \sum \omega . \overline{OM}^2$ est, par définition, le moment d'inertie polaire J par rapport au point O, par suite

$$I_x + I_y = J ;$$

ce qu'il fallait démontrer.

206. ***Moment d'inertie polaire d'un cercle par rapport à son centre.*** — Considérons un cercle de centre O et de rayon R et cherchons son moment d'inertie polaire par rapport à O (fig. 132).

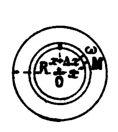


Fig. 132.

Pour cela, imaginons que l'on découpe le cercle en des anneaux très étroits ayant pour centre le point O et prenons un de ces anneaux que nous considérerons comme assez étroit pour que son épaisseur soit négligeable ; tous les points de l'anneau sont alors à une même distance x du centre.

Soit M une portion très petite de la surface de cet anneau, d'aire ω ; pour avoir le moment d'inertie de l'anneau, il faut calculer $\sum \omega x^2$, cette somme étant étendue à tous les petits morceaux analogues à ω en lesquels on a découpé l'anneau. Or, on a

$$\sum \omega x^2 = \omega x^2 + \omega' x^2 + \omega'' x^2 + \ldots,$$

ω, ω', ω'', ... étant les morceaux qui composent l'anneau et ceci s'écrit :

$$\sum \omega x^2 = x^2 (\omega + \omega' + \omega'' + \ldots).$$

La quantité entre parenthèse est la surface totale

de l'anneau et cette surface est $2\pi x \Delta x$, $2\pi x$ étant la longueur de l'anneau et Δx son épaisseur. Le moment d'inertie polaire de l'anneau par rapport au point O est donc :

$$\sum \omega x^2 = 2\pi x \ \Delta x. \ x^2$$

ou :

$$\sum \omega x^2 = 2\pi x^3 \ \Delta x.$$

Le moment d'inertie polaire I du cercle entier est égal à la somme des moments d'inertie de tous les anneaux

$$I = lim \sum 2\pi x^3 \ \Delta x,$$

quand les accroissements Δx tendent vers zéro.

$\sum 2\pi x^3 \Delta x$ est une intégrale prise dans des limites qui sont les valeurs extrêmes de x, c'est-à-dire de o à R. On a donc

$$I = \int_0^R 2\pi x^3 dx,$$

$$I = \left(2\pi \frac{x^4}{4}\right)_0^R = \left(\frac{\pi x^4}{2}\right)_0^R$$

et, enfin,

$$I = \frac{\pi R^4}{2} = \pi R^2 \frac{R^2}{2}.$$

πR^2 étant la *surface* du cercle, on peut dire que :

Le moment d'inertie polaire d'un cercle par rapport à son centre est égal au produit de l'aire de ce cercle par la moitié du carré de son rayon.

207. ***Moment d'inertie d'un cercle par rapport à un diamètre.*** — Soit un cercle O de rayon R et cherchons son moment d'inertie par rapport à un axe xx' passant par son centre O (fig. 133). Menons l'axe yy' perpendiculaire à xx' au point O. Le moment d'inertie du cercle par rapport à l'axe yy' est le même que le moment d'inertie I du cercle par rapport à l'axe xx', par raison de symétrie.

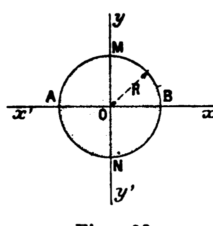


Fig. 133.

Soit J le moment d'inertie polaire du cercle par rapport au centre, on a (n° **205**)

$$J = I + I = 2\,I,$$

et de là on tire

$$I = \frac{J}{2}.$$

Or, on a trouvé que

$$J = \frac{\pi R^4}{2};$$

on a donc, pour le moment d'inertie cherché,

$$I = \frac{\pi R^4}{4} = \pi R^2 . \frac{R^2}{4}.$$

πR^2 étant la surface du cercle, on peut dire que :

Le moment d'inertie d'un cercle par rapport à un diamètre est égal au produit de l'aire de ce cercle par le quart du carré de son rayon.

208. ***Moment d'inertie d'un cercle par rapport à une droite quelconque de son plan.*** — Soit un cercle

de centre O et de rayon R (fig. 134) et cherchons son moment d'inertie par rapport à la droite $x'x$ située à une distance d du centre O. On a (n° **195**), en désignant par I_x et I_y les moments d'inertie du cercle par rapport à l'axe xx' et à l'axe parallèle yy' passant par O,

$$I_x = I_y + Sd^2,$$

$$I_x = \frac{1}{4}\pi R^4 + \pi R^2 d^2,$$

$$I_x = \pi R^2 \left(\frac{R^2}{4} + d^2\right).$$

Fig. 134.

209. ***Applications.*** — MOMENT D'INERTIE D'UN DEMI-CERCLE PAR RAPPORT AU DIAMÈTRE QUI LE LIMITE.

Considérons (fig. 133) le demi-cercle AMB. On a trouvé que le moment d'inertie du cercle entier par rapport à AB était

$$I = \frac{1}{4}\pi R^4.$$

Or, les deux morceaux AMB et ANB étant égaux et placés d'une façon symétrique par rapport à AB, leurs moments d'inertie sont égaux. Comme la somme de ces moments d'inertie est égale à I chacun est égal à $\frac{I}{2}$. Le moment d'inertie cherché est donc égal à

$$\frac{1}{8}\pi R^4.$$

On arriverait au même résultat en cherchant le moment d'inertie par rapport à l'axe yy' passant par O et perpendiculaire à AB.

210. MOMENT D'INERTIE D'UN CERCLE ÉVIDÉ. — Soient R le rayon extérieur, r le rayon intérieur (fig. 135) d'un

anneau circulaire. Le moment d'inertie de la surface couverte de hachures, par rapport à l'axe xx' passant par O, est la différence des moments d'inertie des cercles extérieur et intérieur. En effet, soit I_1 le moment d'inertie du cercle intérieur supposé plein et soit I_2 le moment d'inertie du cercle total ; le grand cercle étant la somme du petit cercle et de l'anneau, si I est le moment d'inertie de l'anneau, on a (n° **194**).

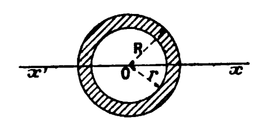


Fig. 135.

$$I_2 = I_1 + I.$$

De là, on tire

$$I = I_2 - I_1$$

$$I = \frac{1}{4}\pi R^4 - \frac{1}{4}\pi r^4$$

$$I = \frac{\pi}{4}\left(R^4 - r^4\right) = \pi\left(R^2 - r^2\right) . \frac{R^2 + r^2}{4}.$$

On remarquera que $\pi (R^2 - r^2)$ est l'aire de la surface considérée.

211. MOMENT D'INERTIE D'UN CERCLE ÉVIDÉ PAR RAPPORT A UN AXE QUELCONQUE.

Soient R et r les rayons extérieur et intérieur de l'anneau (fig. 136). Le moment d'inertie de la surface couverte de hachures sur la figure, par rapport à l'axe xx' situé à une distance d du centre O, est égal (n° **195**) au moment d'inertie par rapport à l'axe yy' parallèle à xx' et passant par O augmenté du

Fig. 136.

produit Sd^2, S étant l'aire de l'anneau. On a donc :

$$I = \frac{\pi}{4}\left(R^4 - r^4\right) + Sd^2.$$

Or

$$S = \pi R^2 - \pi r^2$$

On a donc :

$$I = \frac{\pi}{4}\left(R^4 - r^4\right) + \pi\left(R^2 - r^2\right)d^2,$$

$$I = \pi\left(R^2 - r^2\right)\left[\frac{R^2 + r^2}{4} + d^2\right].$$

212*. ***Variation du moment d'inertie d'une surface.*** — Considérons une surface quelconque S (fig. 137) ; soient O un point de son plan et Ox, Oy deux axes rectangulaires pas-

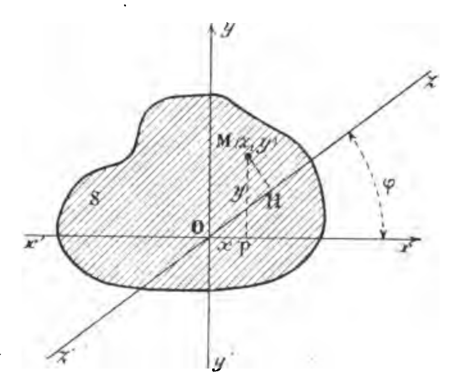


Fig. 137.

sant par ce point. Menons par O une droite quelconque $z'z$ et proposons-nous de calculer le moment d'inertie de la surface par rapport à $z'z$ et d'étudier comment ce moment varie lorsque $z'z$ tourne autour de O.

Désignons par φ l'angle xOz ; prenons un élément de surface M, d'aire ω, et calculons sa distance MH à $z'z$. A cet effet,

abaissons la perpendiculaire MP sur Ox. Les deux contours OPM et OHM, ayant même résultante OM, ont des projections égales sur un axe quelconque. On a donc :

$$\text{proj.}\,(\overline{OH}) + \text{proj.}\,(\overline{HM}) = \text{proj.}\,(\overline{OP}) + \text{proj.}\,(\overline{PM}).$$

Projetons sur la droite HM ; nous aurons :

$$\text{proj.}\,(\overline{OH}) = 0, \quad \text{proj.}\,(\overline{HM}) = \overline{HM},$$
$$\text{proj.}\,(\overline{OP}) = \overline{OP}.\cos(90^\circ + \varphi) = -x\sin\varphi,$$
$$\text{proj.}\,(\overline{PM}) = \overline{PM}.\cos\varphi = y\cos\varphi,$$

en désignant par x et y les coordonnées du point M par rapport aux axes Ox et Oy.

En portant ces valeurs des projections des segments dans l'égalité (1), on en conclut :

$$\overline{HM} = y\cos\varphi - x\sin\varphi. \tag{2}$$

Cela étant, le moment d'inertie de la surface S par rapport à l'axe $z'z$ est :

$$I = \lim \sum \omega\,\overline{HM}^2,$$

la somme Σ s'étendant à toutes les portions d'aire ω en lesquelles on suppose que la surface a été décomposée. En remplaçant $\overline{HM}$ par sa valeur (2) on a, pour le moment I, l'expression suivante :

$$I = \lim \sum \omega\,(y\cos\varphi - x\sin\varphi)^2$$

ou

$$I = \lim \sum \omega y^2\cos^2\varphi + \lim \sum \omega x^2\sin^2\varphi - \lim \sum 2\,\omega xy\cos\varphi\sin\varphi.$$

La première somme développée s'écrit :

$$\sum \omega y^2\cos^2\varphi = \omega y^2\cos^2\varphi + \omega' y'^2\cos^2\varphi + \omega'' y''^2\cos^2\varphi + \ldots,$$

ω, ω', ω''... étant les divers éléments de la surface S et y, y' y''... leurs distances respectives à Ox. Dans cette somme, on peut mettre $\cos^2\varphi$ en facteur et elle s'écrit :

$$\sum \omega y^2 \cos^2\varphi = (\omega y^2 + \omega' y'^2 + \omega'' y''^2 + \ldots) \cos^2\varphi = \cos^2\varphi \sum \omega y^2.$$

De même, dans la seconde somme on peut mettre $\sin^2\varphi$ en facteur et dans la dernière $2\cos\varphi\sin\varphi$. On a donc :

$$I = A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi - 2C\cos\varphi\sin\varphi, \tag{3}$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$A = \lim \sum \omega y^2, \quad B = \lim \sum \omega x^2, \quad C = \lim \sum \omega xy.$$

Les trois quantités A, B, C, ne dépendent pas de φ, elles ne dépendent que de la forme et de l'étendue de la surface S et de la position du point O ; ce sont donc trois *constantes* que l'on peut calculer. Les deux premières ont d'ailleurs des significations simples : A c'est le moment d'inertie de la surface S par rapport à Ox et B celui par rapport à Oy.

Pour avoir le moment d'inertie de la surface S par rapport à un axe arbitraire $z'z$ passant par O, il suffit donc de calculer, une fois pour toutes, les trois constantes A, B et C et d'appliquer la formule (3). En faisant varier φ, on pourra étudier la variation correspondante de I. Pour faire commodément cette étude, nous ferons d'abord une simplification importante de la formule (3) en choisissant convenablement les axes Ox et Oy.

213*. ***Axes principaux d'inertie.*** — Considérons deux nouveaux axes rectangulaires OX, OY (fig. 138) obtenus en faisant tourner les axes Ox, Oy d'un angle α dans le sens positif. Nous pouvons toujours supposer que α est plus petit que 90°, car si on trace deux droites quelconques rectangulaires passant par O il y a toujours un des quatre rayons ainsi obtenus qui fait avec Ox un angle aigu et il suffit de le nommer OX.

Soit ψ l'angle XOz ; on a :

$$\varphi = \psi + \alpha,$$
$$\cos\varphi = \cos(\psi+\alpha) = \cos\psi\cos\alpha - \sin\psi\sin\alpha,$$
$$\sin\varphi = \sin(\psi+\alpha) = \sin\psi\cos\alpha + \cos\psi\sin\alpha.$$

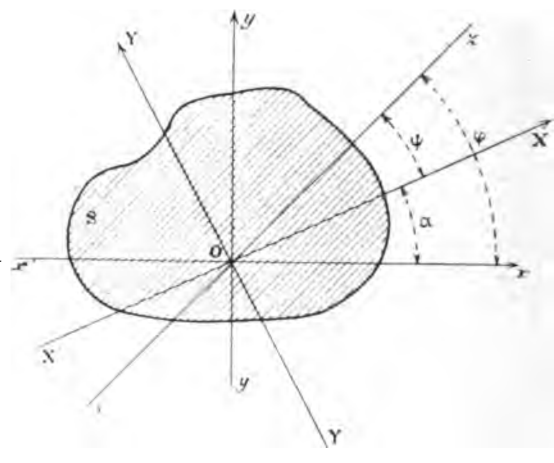


Fig. 138.

En portant ces valeurs de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ dans la formule (3), développant les calculs et ordonnant, on obtient :

$$I = A_1\cos^2\psi + B_1\sin^2\psi - 2C_1\cos\psi\sin\psi, \tag{4}$$

en posant, pour abréger,

$$A_1 = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha - 2C\cos\alpha\sin\alpha,$$
$$B_1 = A\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha + 2C\cos\alpha\sin\alpha,$$
$$C_1 = (A - B)\cos\alpha\sin\alpha + C(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Dans cette formule (4) A_1, B_1, C_1 et ψ jouent respectivement par rapport aux axes OX, OY les rôles que jouaient A, B, C et φ, dans la formule (3), par rapport aux axes Ox et Oy. En particulier, A_1 et B_1 sont évidemment les moments d'inertie de la surface S par rapport à OX et OY puisque ce sont les valeurs particulières de I pour $\psi = 0$ et $\psi = 90°$.

Ceci posé, choisissons l'angle α, qui jusqu'ici n'a pas été fixé, de façon que C_1 soit *nul*. Ceci est possible, car en égalant $2C_1$ à zéro on a l'équation :

$$2(A - B)\cos\alpha \sin\alpha + 2C(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0.$$

qui s'écrit :

$$(A - B)\sin 2\alpha + 2C\cos 2\alpha = 0.$$

on en tire :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2C}{B - A}. \qquad (5)$$

Il existe toujours un angle et un seul, compris entre 0° et 180° qui a pour tangente un nombre donné à l'avance, $\frac{2C}{B-A}$ par exemple ; en en prenant la moitié nous trouvons ainsi une valeur et une seule pour α, comprise entre 0° et 90°, qui annule C_1. α étant ainsi choisi, la formule (4) qui donne I se réduit à la forme plus simple :

$$I = A_1 \cos^2\psi + B_1 \sin^2\psi. \qquad (6)$$

En résumé :

Étant donné une surface quelconque et un point O *dans son plan, il existe toujours deux axes rectangulaires* OX, OY *passant par* O, *appelés* AXES PRINCIPAUX D'INERTIE *relatifs au point* O, *tels que le moment d'inertie* I *de la surface par rapport à un axe passant par* O *et faisant avec* OX *l'angle* ψ *soit donné par la formule simple :*

$$I = A_1 \cos^2\psi + B_1 \sin^2\psi, \qquad (6)$$

dans laquelle A_1, B_1 *sont les* MOMENTS D'INERTIE PRINCIPAUX *relatifs aux axes principaux* OX, OY.

214*. *Ellipse d'inertie.* — Pour étudier facilement au moyen de la formule (6) la variation de I quand ψ varie, nous emploierons une représentation géométrique qui peut être très utile dans la pratique.

Sur l'axe Oz (fig. 139), portons, à partir de O, deux segments OJ et OJ′ égaux tous deux *à l'inverse de la racine carrée du*

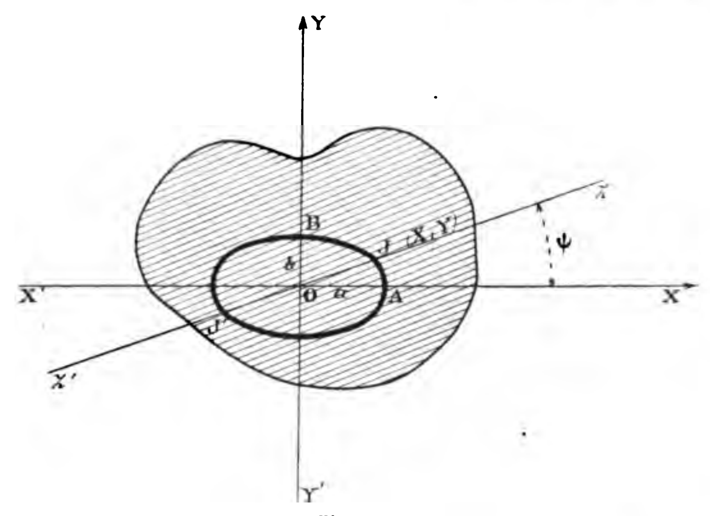


Fig. 139.

moment d'inertie de la surface S *par rapport à cet axe* Oz. Nous avons donc :

$$OJ = OJ' = \frac{1}{\sqrt{I}},$$

ou

$$I = \frac{1}{\overline{OJ}^2}.$$

La formule (6) s'écrit alors

$$\frac{1}{\overline{OJ}^2} = A_1 \cos^2 \psi + B_1 \sin^2 \psi$$

ou

$$A_1 (OJ \cos \psi)^2 + B_1 (OJ \sin \psi)^2 = 1. \qquad (7)$$

Désignons par X et Y les coordonnées de J par rapport aux axes OX et OY ; on a :

$$X = OJ \cos \psi, \qquad Y = OJ \sin \psi.$$

D'autre part, si on désigne par A et B les positions de J quand Oz coïncide avec OX et OY ; et par a et b les longueurs OA et OB, les moments d'inertie de la surface par rapport à OX et OY sont :

$$A_1 = \frac{1}{a^2}, \qquad B_1 = \frac{1}{b^2}.$$

L'égalité (7) s'écrit alors :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1. \tag{8}$$

Sous cette forme on voit que le lieu géométrique du point J de coordonnées X et Y est un ellipse d'axes OX et OY. C'est ce qu'on appelle *l'ellipse d'inertie.*

On arrive donc à la conclusion finale que voici :

Étant donnés une surface quelconque S *et un point O dans son plan, soient* OX *et* OY *les axes principaux d'inertie relatifs au point* O (fig. 139), *on trace* L'ELLIPSE D'INERTIE *dont les axes sont, en position,* OX *et* OY *et en demi-grandeur les inverses des racines carrées des moments d'inertie principaux par rapport à* OX *et* OY. *Pour avoir le moment d'inertie de* S *par rapport à un axe quelconque* $z'z$ *passant par* O, *il suffit de prendre l'un de ses points d'intersection* J *avec l'ellipse, de mesurer* OJ *et de calculer le carré de son inverse,* $\frac{1}{\overline{OJ}^2}$, *qui est le moment cherché.*

215*. ***Cas particulier.*** — Dans le cas particulier où les deux moments d'inertie principaux sont égaux, on a $a = b$ et l'ellipse d'inertie devient un *cercle* de rayon a. Dans ce cas tous les moments d'inertie par rapport à tous les axes passant par O sont *égaux* à $\frac{1}{a^2}$; on peut dire qu'ils sont *tous* principaux.

D'ailleurs, dans ce cas, la quantité C_1 du N° **213*** est *identiquement* nulle quel que soit α, car on a :

$$A = B \quad \text{et} \quad C = 0.$$

216*. *Exemples.* — Dans la pratique il suffit de connaître l'ellipse d'inertie d'une surface par rapport à son centre de gravité ; car, dès qu'on connaît ses moments d'inertie par rapport à tous les axes passant par le centre de gravité, il suffit d'appliquer le théorème du N° **195** pour en déduire les moments par rapport à des axes quelconques.

Toute la difficulté revient à déterminer les axes principaux pour le centre de gravité.

Lorsque la surface a un axe de symétrie la chose est facile car cet axe est évidemment principal, par raison de symétrie.

En voici des exemples :

1° Les axes principaux d'inertie d'un rectangle par rapport à son centre de gravité sont parallèles aux côtés du rectangle. Comme on connaît (N° **197**) les moments d'inertie par rapport à ces axes, l'ellipse d'inertie est facile à tracer.

2° Dans le cas particulier du carré, les deux moments principaux sont *égaux ;* donc l'ellipse devient un cercle (N° **215***) et les moments d'inertie par rapport à tous les axes passant par le centre sont égaux.

3° Dans le cas d'un cercle, l'ellipse d'inertie relative au centre est évidemment un cercle.

217. *Construction graphique du moment d'inertie d'une surface quelconque.* — Lorsqu'une surface a une forme quelconque, il est quelquefois très difficile de calculer son moment d'inertie. On peut alors avoir recours à une construction graphique.

Considérons une surface S (fig. 140) de forme absolument quelconque dont il s'agit de trouver le moment d'inertie par rapport à l'axe xx'. Menons un axe Oy perpendiculaire à xx' et une droite zz' parallèle à xx' à une distance OA égale à l'*unité* de distance mesurée à l'échelle de la surface donnée S. Menons une parallèle à xx' qui coupe la surface aux points M et P. De P abaissons la perpendiculaire PP′ sur zz' et joignons OP′; cette droite prolongée rencontre

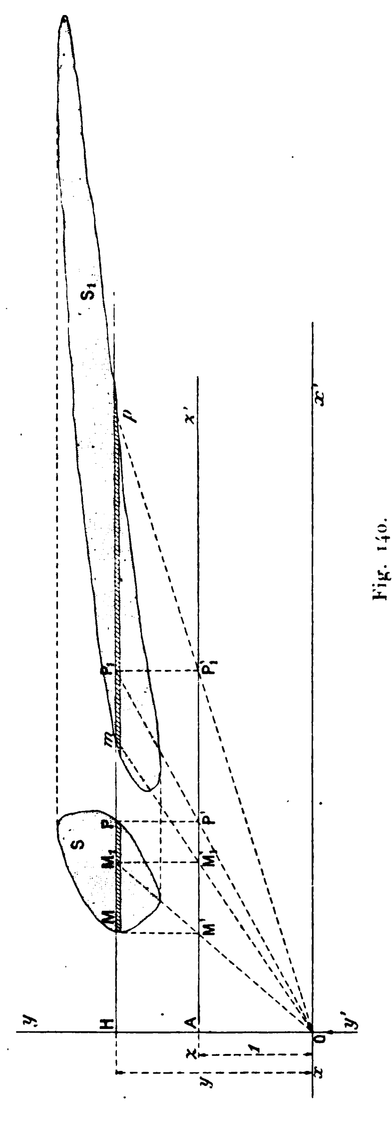


Fig. 140.

MP en un point P_1. Menons $P_1P'_1$, perpendiculaire à zz' et joignons OP'_1, que nous prolongerons jusqu'à sa rencontre en p avec MP.

De même de M abaissons la perpendiculaire MM′ sur zz' et menons OM′ qui prolongée rencontre MP au point M_1 ; menons M_1M_1' perpendiculaire à zz' et joignons OM_1' qui coupe en m la droite MP.

Nous obtenons ainsi deux points m et p sur MP.

En recommençant cette construction pour un grand nombre de parallèles à xx' coupant la surface, on trouve sur chacune d'elles deux points ; en joignant ces points on obtient un contour fermé qui limite une nouvelle surface S_1. Nous allons montrer que le moment d'inertie de la surface S est égal à l'aire de la surface S_1.

En effet, imaginons que l'on découpe la surface S en bandes très petites MP parallèles à Ox. Le moment d'inertie de la bande MP, par exemple, par rapport à xx', est le produit de la surface de la bande par le carré de sa distance à xx'. On aura donc, en posant $OH = y$ et en appelant Δy l'épaisseur de la bande MP, pour le moment d'inertie de la bande :

$$MP.\ \Delta y.\ y^2$$

et le moment d'inertie de la surface S sera :

$$I = lim \sum MP.\ \Delta y.\ y^2.$$

Les deux triangles semblables M_1P_1O et $M'P'O$ donnent :

$$\frac{M_1P_1}{M'P'} = \frac{OH}{OA}$$

ou

$$\frac{M_1P_1}{MP} = \frac{y}{1};$$

d'où on tire

$$M_1P_1 = y.\ MP. \qquad (1)$$

Les triangles semblables mpO et $M_1'P_1'O$ donnent

$$\frac{mp}{M_1'P_1'} = \frac{OH}{OA}$$

ou

$$\frac{mp}{M_1P_1} = \frac{y}{1};$$

d'où on tire

$$mp = M_1P_1.\ y.$$

en remplaçant dans cette dernière équation M_1P_1 par sa valeur (1), on a

$$mp = y^2.\ MP$$

ou, en multipliant les deux membres par Δy,

$$mp.\Delta y = y^2.\,\text{MP}.\,\Delta y. \qquad (2)$$

Le premier membre $mp\,\Delta y$ est la surface d'une bande très petite mp d'épaisseur Δy et $\sum mp.\Delta y$ est la surface de toutes ces bandes qui forment la surface S_1 : c'est la surface totale S_1.

Le second membre $y^2.\,\text{MP}.\,\Delta y$ est le moment d'inertie de la bande MP et $\sum \text{MP}.\,\Delta y.\,y^2$ est le moment d'inertie de la surface S. La relation (2) peut donc s'écrire :

$$lim \sum y^2.\,\text{MP}.\,\Delta y = lim \sum mp\,\Delta y$$

ou

$$I = S_1.$$

Donc l'aire de la surface S_1 est le moment d'inertie de la surface S. On la mesure à l'échelle des longueurs adoptée, par un procédé graphique quelconque ou au planimètre.

Tableau des moments d'inertie des surfaces usuelles.

FIGURES	MOMENTS D'INERTIE
	$I_{xx'} = \frac{ab^3}{12} = S.\,\frac{b^2}{12}.$ $I_{yy'} = \frac{ab^3}{3} = S\,\frac{b^2}{3}.$ $I_{zz'} = ab\left[\frac{b^2}{12} + d^2\right] = S\left[\frac{b^2}{12} + d^2\right].$

FIGURES	MOMENTS D'INERTIE
	$I_{xx'} = \frac{ah^3}{36} = S\ \frac{h^2}{18}.$ $I_{yy'} = \frac{ah^3}{12} = S\ \frac{h^2}{6}.$ $I_{zz'} = \frac{ah}{2}\left[\frac{h^2}{18} + d^2\right] = S\left[\frac{h^2}{18} + d^2\right].$
	$I_{xx'} = \frac{a'^3b' + ab^3}{12}.$
	$I_{xx'} = \frac{a'^3b'}{6} + \frac{ab^3}{12}.$ $I_{yy'} = \frac{a^3b}{12} + a'b'\left(\frac{2b'^2}{3} + \frac{a^2}{2} + ab'\right).$
	$I_o = \frac{\pi R^4}{2} = S\ \frac{R^2}{2}.$ $I_{xx'} = \frac{\pi R^4}{4} = S\ \frac{R^2}{4}.$ $I_{yy'} = \pi R^2\left(\frac{R^2}{4} + d^2\right) = S\left(\frac{R^2}{4} + d^2\right).$
	$I_{xx'} = I_{yy'} = \frac{\pi R^4}{8} = S\ \frac{R^2}{4}.$
	$I_o = \pi(R^2 - r^2)\ \frac{R^2 + r^2}{2} = S\ \frac{R^2 + r^2}{2}.$ $I_{xx'} = \pi(R^2 - r^2)\ \frac{R^2 + r^2}{4} = S\ \frac{R^2 + r^2}{4}.$ $I_{yy'} = \pi(R^2 - r^2)\left(\frac{R^2 + r^2}{4} + d^2\right)$ $= S\left(\frac{R^2 + r^2}{4} + d^2\right).$

CHAPITRE VII

MACHINES SIMPLES. — FROTTEMENT

§ Ier. — Leviers. Balances

218. ***Définitions.*** — On nomme *machine simple* un appareil qui sert à vaincre ou tout au moins à équilibrer une force nommée *résistance* au moyen d'une autre force, dont on dispose, nommée *puissance.*

En général, le but de ces appareils est de vaincre une force très grande au moyen d'une force relativement petite.

219. ***Leviers.*** — Le *levier* est un corps solide de forme quelconque, mobile en tous sens autour d'un point fixe, que l'on nomme *point d'appui.* En un point A du levier est appliquée une force R, *la résistance*, qu'il s'agit de vaincre ; et en un point B on applique une autre force P, *la puissance*, qui doit faire équilibre à la résistance (fig. 141).

220. ***Conditions d'équilibre d'un levier.*** — Soit AOB un levier (fig. 141), P la puissance appliquée au point B, R la résistance appliquée en A et O le point d'appui. Faisons abstraction du poids de l'appareil, ou supposons le centre de gravité en O.

Nous avons un corps mobile autour d'un point fixe et soumis à deux forces. Pour qu'il soit en équilibre

(n° 97), il faut et il suffit que les deux forces aient une résultante qui passe par le point fixe O ou qu'on puisse trouver une force F appliquée au point O et qui fasse équilibre aux deux forces P et R.

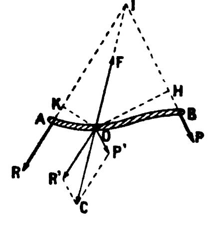


Fig. 141.

Les trois forces P, R et F doivent se faire équilibre, il faut donc d'abord qu'elles soient dans un même plan avec le point O, et, par suite, ceci doit avoir lieu, en particulier, pour P et R.

Si l'on fait la réduction des forces au point O, en transportant les forces P et R parallèlement à elles-mêmes en ce point on introduit deux couples, le premier dont le moment est $\mathfrak{M}_0 P$ le second dont le moment est $\mathfrak{M}_0 R$.

Pour qu'il y ait une résultante unique C appliquée au point O, il faut et il suffit que ces deux couples se fassent équilibre; il faut donc qu'ils aient des moments égaux et de signes contraires.

Abaissons les perpendiculaires OH, OK sur les directions des forces P et R, on a

$$\mathfrak{M}_0 P = \text{OH}.\,P,$$
$$\mathfrak{M}_0 R = \text{OK}.\,R,$$

en valeur absolue.

On a donc

$$\text{OH}.\,P = \text{OK}.\,R$$

d'où

$$\frac{P}{R} = \frac{\text{OK}}{\text{OH}}. \qquad (1)$$

ce qui signifie que les forces doivent être inverse-

ment proportionnelles à leurs distances au point d'appui.

En résumé, *pour qu'un levier sollicité par deux forces soit en équilibre, il faut et il suffit :*

1° *Que les directions de ces forces soient dans un même plan avec le point d'appui ;*

2° *Que leurs intensités soient inversement proportionnelles à leurs distances à ce point ;*

3° *Qu'elles tendent à faire tourner le levier dans des sens contraires autour du point d'appui.*

221. Remarque. — Les distances OH, OK se nomment : la première, *le bras de levier de la puissance ;* la seconde, *le bras de levier de la résistance.*

De la relation (1) on tire :

$$P = \frac{OK}{OH} . R.$$

On peut s'arranger de façon que le rapport $\frac{OK}{OH}$ soit aussi petit que l'on voudra, la valeur de P peut donc être aussi petite que l'on veut.

Ainsi, si $\frac{OK}{OH} = \frac{1}{10}$ la puissance est le dixième de la résistance.

On peut soulever un poids de 100 kilogrammes avec un poids de 10 kilogrammes.

222. Charge au point d'appui. — La pression supportée par le point d'appui est égale, toujours abstraction faite du poids du levier, à la force égale et directement opposée à la réaction F ; cette force est la résultante C des forces P′ et R′ qui ne sont autres que les forces P et R transportées en O. Elle est donc (n° **32**) égale à

$$\sqrt{P^2 + R^2 + 2PR \cos (P, R)}.$$

Lorsque les forces P et R sont parallèles, la charge au point d'appui est égale à leur somme algébrique.

223. ***Leviers des différents genres.*** — On distingue habituellement trois genres de leviers, suivant la position qu'occupe le point d'appui par rapport aux points d'application de la puissance et de la résistance.

Les leviers dont on se sert le plus souvent sont des leviers droits, ayant la forme d'une barre rectiligne rigide, qu'on sollicite par des forces parallèles P et R. Dans ce cas, les trois points A,O,B. sont en ligne droite (fig. 142) et les deux perpendiculaires Oa et Ob sont sur le prolongement l'une de l'autre et déterminent avec les segments OA et OB du levier deux triangles semblables OAa et OBb.

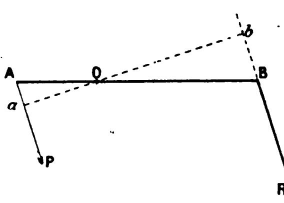


Fig. 142.

On en déduit l'égalité

$$\frac{Ob}{Oa}=\frac{OB}{OA}$$

par conséquent, l'équation d'équilibre peut s'écrire

$$\frac{P}{R}=\frac{OB}{OA}$$

et elle exprime que les deux forces sont en raison inverse des bras du levier; en appelant les longueurs OA et OB les *bras du levier*.

224. Leviers du premier genre. — Le levier est dit

du premier genre quand le point d'appui se trouve entre la puissance et la résistance (fig. 142).

Parmi ces leviers, nous pouvons citer les fléaux

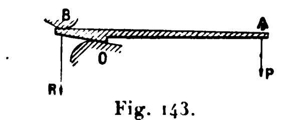


Fig. 143.

de balance (que nous allons étudier) ; la pince à talon (fig. 143), barre de fer dont se servent les maçons et les carriers pour soulever ou détacher de gros blocs de roche ; les ciseaux.

Dans ce genre de leviers, le rapport $\frac{P}{R}$ a telle valeur que l'on veut : si O est plus près de B que de A, le rapport $\frac{OB}{OA}$ est plus petit que 1 et par conséquent la puissance est plus petite que la résistance ; si O est plus près de A que de B, $\frac{OB}{OA}$ est plus grand que 1 et la puissance est plus grande que la résistance ; enfin si O est au milieu de AB, le rapport $\frac{OB}{OA}$ est égal à 1 et la puissance est égale à la résistance.

La charge du point d'appui est la somme $P + R$.

225. Leviers du second genre. — Le levier est du *second genre* quand la résistance se trouve entre la puissance et le point d'appui (fig. 144). Dans ce cas, la résistance et la puissance sont de sens contraires et comme le bras de levier de la puissance est plus grand que celui de la résistance ; cette dernière force est supérieure à la puissance.

Parmi ces leviers, nous pouvons citer la barre de

fer des carriers disposée comme le montre la figure 145; la brouette; le casse-noisettes; les rames;

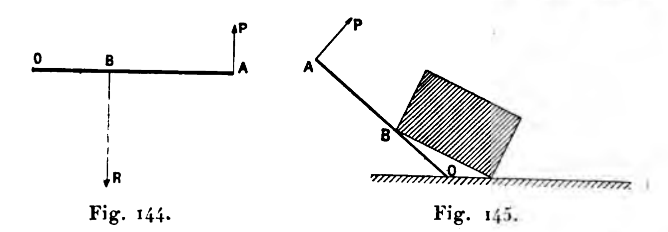


Fig. 144. Fig. 145.

la plupart des balanciers de pompes auxquels on imprime à la main un mouvement de va-et-vient alternatif (fig. 146).

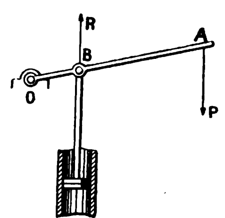


Fig. 146.

La charge au point d'appui est la différence R — P des forces P et R puisque, dans ce cas, les forces sont de sens contraires.

226. Levier du troisième genre. — Le levier est du *troisième genre* quand la puissance se trouve entre la résistance et le point d'appui (fig. 147). Dans ce levier, la puissance est supérieure à la résistance, car le bras de levier de cette dernière force est le plus grand.

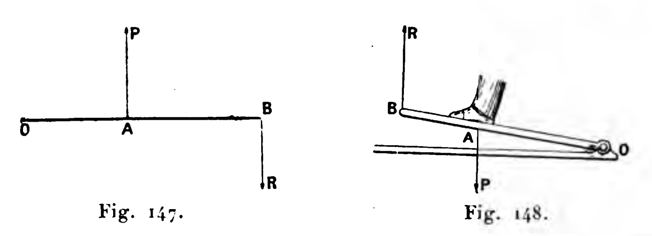


Fig. 147. Fig. 148.

Les pincettes, la pédale du rémouleur, (fig. 148) sont des leviers du troisième genre.

Ici la charge du point d'appui est encore égale à la différence de la puissance et de la résistance, P — R.

227*. Remarque. — Au premier abord, il semble que le levier permette *de créer de la force* ou du moins de créer de *l'énergie*, puisqu'avec une force relativement petite on arrive à vaincre une force plus grande.

Ce n'est là qu'une apparence. On ne peut pas *créer* de l'énergie, on ne peut que transformer une énergie en une autre.

Pour rendre ceci clair, il faut d'abord savoir ce qu'on entend par *énergie*.

Lorqu'une force agît sur un point matériel qui se déplace, on appelle *énergie* dépensée par cette force le *travail* qu'elle effectue.

Dans le cas d'une force constante appliquée à un point qui se déplace en ligne droite dans la direction de la force, on nomme *travail* le produit de l'intensité de la force par la longueur du chemin que décrit son point d'application. Suivant que la force agit dans le sens du mouvement ou en sens contraire, le travail est dit moteur ou résistant. On peut considérer le travail moteur comme positif et le travail résistant comme négatif.

On prend comme *unité* de travail, le travail nécessaire pour élever un poids de un kilogramme à un mètre de hauteur. Cette unité se nomme *kilogrammètre*.

Nous allons montrer que dans le levier, il n'y a pas création de travail, mais qu'il n'y a qu'une *transformation de travail*, c'est-à-dire une transformation de l'énergie, car *le travail de la résistance est égal au travail de la puissance*.

Soit un levier du premier genre, par exemple, sollicité par deux forces P et R que nous supposerons appliquées aux extrémités A et B de leurs bras de levier OA et OB (fig. 149) et, sans cesse, perpendiculairement à OA et OB.

Supposons que le levier ait tourné d'un angle α (sans nous préoccuper de la cause de ce mouvement, de la manière dont il s'est produit) et que sa nouvelle position soit A′B′. Les

points d'application A et B ont parcouru les chemins : *arc* AA′ et *arc* BB′. Or, on a :

$$arc\ AA' = OA \times \alpha,$$
$$arc\ BB' = OB \times \alpha.$$

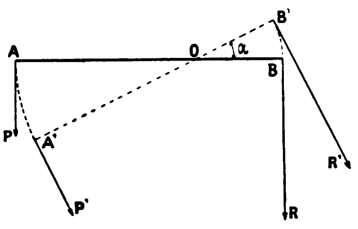


Fig. 149.

Le travail de la résistance est donc :

$$\mathfrak{T} = R \times arcB\ B' = R.\ OB.\ \alpha.$$

Le travail de la puissance est :

$$\mathfrak{T}' = P \times arc\ AA' = P.\ OA.\ \alpha.$$

Or, on a, en vertu de la condition d'équilibre du levier,

$$R.\ OB = P.\ OA$$

d'où, en multipliant par α,

$$R.OB.\alpha = P.OA.\alpha$$

ou

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'.$$

Le travail de la puissance est donc égal au travail de la résistance.

La puissance est une force plus petite que la résistance mais elle a à parcourir un chemin plus grand que celui que parcourt la résistance, ce qui revient à dire que *l'on perd en force ce que l'on gagne en chemin parcouru* et, réciproquement, on gagne en force ce que l'on perd en chemin parcouru.

228. ***Balances.*** — La *balance* est un appareil qui sert à comparer entre eux des poids. Comparer le poids d'un corps à des poids connus, c'est ce qu'on appelle *peser* ce corps.

229. ***Balance ordinaire.*** — La balance ordinaire (fig. 150) se compose essentiellement d'un levier du premier genre nommé *fléau*, aux extrémités duquel sont suspendus deux plateaux destinés à recevoir, l'un

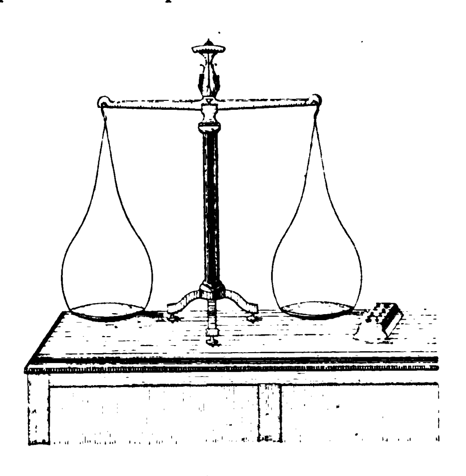


Fig. 150.

le corps à peser, l'autre les poids marqués (grammes, kilogrammes, etc.) qui servent à déterminer le poids du corps. Le fléau est traversé perpendiculairement, en son milieu, par un prisme triangulaire qui fait corps avec lui et repose par son arête inférieure sur deux plans d'agate ou d'acier trempé (fig. 151). Cette arête est l'axe autour duquel le fléau peut osciller. Deux autres prismes sont adaptés aux extrémités du fléau ; leur arête vive, dirigée vers le haut, reçoit les crochets à l'aide desquels sont suspendus les pla-

teaux (fig. 151). Les trois prismes faisant ainsi partie du fléau portent le nom de *couteaux*. Les points où les crochets des plateaux reposent sur les couteaux se nomment les *points de suspension des plateaux*. Nous admettrons toujours que la droite qui

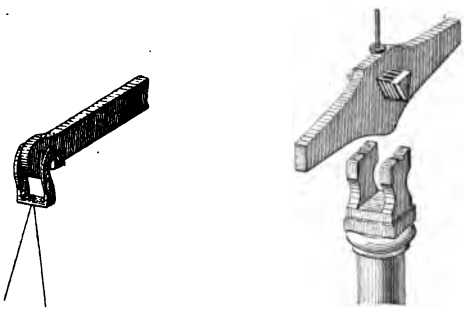


Fig. 151.

joint les points de suspension passe par l'axe de rotation du fléau. Cette condition remplie, on peut regarder le fléau comme une ligne droite aux extrémités de laquelle sont appliquées deux forces verticales égales aux poids des plateaux et des corps qui y sont contenus.

Une bonne balance doit être juste et sensible.

230. Condition de justesse. — On dit qu'une balance est *juste* lorsqu'en mettant deux poids égaux quelconques dans les plateaux le fléau reste dans la même position d'équilibre que lorsque les plateaux sont vides.

Il faut pour cela que les deux *bras du fléau* soient *égaux*, c'est-à-dire que les distances de l'axe de rotation aux points de suspension des plateaux soient égales.

En effet, soient O (fig. 152) le point d'appui du

fléau, A et B les points de suspension des plateaux. Le fléau est soumis à cinq forces : son poids, les poids des plateaux appliqués en A et B et les poids que l'on veut comparer, posés dans les plateaux, poids qu'on peut considérer comme appliqués en A et B. Les trois premières forces à savoir le poids du fléau et les poids des deux plateaux sont des forces parallèles, d'intensité constante et appliquées en des points invariables du fléau, elles ont une résultante égale au poids total π des plateaux et du fléau et appliquée en un point fixe G du fléau.

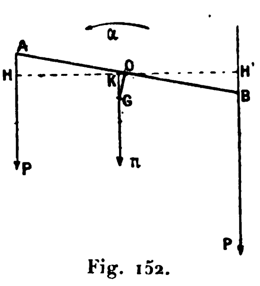


Fig. 152.

Plaçons dans les deux plateaux des poids égaux P. Le fléau est alors soumis à trois forces : deux égales à P appliquées en A et B, et une force égale à π appliquée en G. S'il y a équilibre la somme des moments de ces trois forces par rapport à O est nulle (n° **98**).

Abaissons de O la perpendiculaire commune HKOH′ aux directions des trois forces et comptons les moments positivement dans le sens de la flèche α, on aura :

$$P.OH - P.OH' + \pi.OK = 0. \qquad (1)$$

Supposons d'abord les plateaux vides, on aura $P = 0$ et la relation (1) devient

$$\pi.OK = 0 \quad \text{ou} \quad OK = 0.$$

Donc, lorsque les plateaux sont vides la distance OK est nulle, ce qui exprime que la verticale de G passe par O.

Si la balance est *juste*, il doit en être de même dans

tous les cas où on met dans les plateaux des poids égaux, ce qui revient à dire que la relation (1) doit être vérifiée lorsque $OK = 0$, *quel que soit* P.

En faisant dans cette relation $OK = 0$ il vient :

$$P(OH - OH') = 0$$

et, pour que ceci ait lieu quel que soit P, il faut et il suffit que

$$OH - OH' = 0$$

ou

$$OH = OH'.$$

Or, si OH est égal à OH′ les deux triangles rectangles OAH et OBH′ sont égaux et on a

$$OA = OB.$$

Il faut donc et il suffit que les bras OA et OB soient égaux.

231. Stabilité. — On dit que l'équilibre d'une balance est *stable* si, lorsqu'on écarte légèrement le fléau de sa position d'équilibre, il y revient.

Il est aisé de se rendre compte que pour que l'équibre d'une balance soit stable il faut et il suffit que le point G (fig. 152) soit *au-dessous* du point de suspension O.

En effet, lorsqu'il y a équilibre, la balance étant juste ($OA = OB$) la résultante des deux poids égaux P est appliquée en O milieu de AB et est détruite par la résistance de ce point. Le fléau n'est alors soumis qu'à la seule force π appliquée en G. On voit, sans difficulté, que cette force π, dirigée vers le bas, tend toujours à ramener le point G, au-dessous de O. L'équilibre ne peut donc être stable que si G est au-dessous de O.

Si G coïncidait avec O, le fléau serait en équilibre dans toutes les positions, on dirait que la balance est *folle*. Il est aisé de voir que dans ce cas en mettant des poids inégaux dans les plateaux, le fléau tendrait toujours à se placer verticalement. L'appareil serait pratiquement inutilisable.

232. Conditions de sensibilité. — On dit qu'une balance est *sensible* lorsqu'elle accuse par une notable inclinaison du fléau une faible différence entre les poids placés dans les plateaux.

Soit AB le fléau (fig. 153) suspendu en O; π le poids du fléau et des plateaux appliqué en G. Supposons OG perpendiculaire à AB, de façon que lorsque les plateaux sont vides AB soit horizontale, et supposons aussi OA=OB, de façon que la balance soit juste. Si on place dans les plateaux deux poids égaux P, AB reste horizontale. Ajoutons dans le plateau suspendu en B une surcharge p. Le fléau s'incline et prend une nouvelle position A'B' et le point G vient en G'.

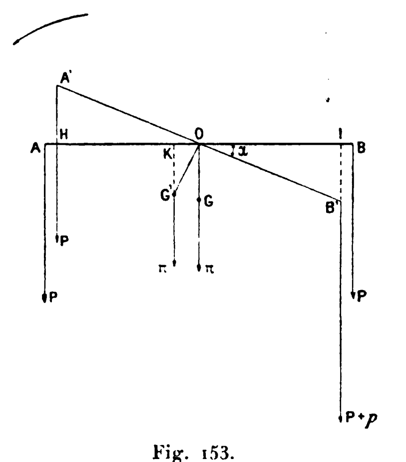


Fig. 153.

Ecrivons qu'il y a équilibre entre les trois forces P, $P+p$ et π appliquées en A', B' et G'. Pour cela, nous écrivons que la somme des moments de ces forces par rapport à O est nulle, ce qui donne :

$$P \times OH - (P+p)OI + \pi \times OK = 0. \qquad (1)$$

Or on a, dans le triangle rectangle OB′I,

$$OI = OB' \cos \alpha = l \cos \alpha,$$

l désignant la longueur de chacun des bras du fléau et α l'angle BOB′ dont s'est incliné le fléau.

Dans le triangle rectangle OA′H on a

$$OH = OA' \cos \alpha = l \cos \alpha$$

et enfin dans le triangle rectangle OG′K dont l'angle OG′ K est égal à α, on a

$$OK = OG' \sin \alpha = d \sin \alpha,$$

d désignant la distance de G au point O.

Portant ces diverses valeurs dans la relation (1), il vient

$$Pl \cos \alpha - Pl \cos \alpha - pl \cos \alpha + \pi d \sin \alpha = o$$

ou, en simplifiant,

$$\pi d \sin \alpha = pl \cos \alpha$$

d'où

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{pl}{\pi d}$$

ou

$$tg \alpha = \frac{pl}{\pi d}.$$

Comme un angle aigu augmente lorsque sa tangente augmente, on déduit de cette formule que, pour une même différence de poids p, le fléau s'inclinera d'autant plus que d et π seront moindres et que l sera plus grand.

En résumé donc, *une balance sera d'autant plus sensible que le centre de gravité sera plus rapproché*

du point d'appui (*tout en restant au-dessous de lui*) *et que le fléau sera plus long et plus léger*.

REMARQUE. — Si $d = o$, $tg\alpha$ est infiniment grande, quel que soit p ; donc

$$\alpha = 90^\circ.$$

Pour une surcharge aussi petite que l'on voudra dans un des plateaux, le fléau tournera de 90° comme nous l'avons annoncé plus haut.

233. PESÉES. — Les balances usuelles sont construites de façon que le fléau soit horizontal lorsque les plateaux sont vides. Pour *peser* un corps on le place dans l'un des plateaux et on met des poids marqués dans l'autre plateau jusqu'à ce que le fléau redevienne horizontal. A cet instant, si la balance est juste, le total des poids marqués est égal au poids du corps.

Il est bien difficile de construire une balance très juste. Lorsqu'on doute de la justesse d'une balance on peut employer la méthode de la *double pesée* qui permet de peser un corps avec une balance fausse. A cet effet, on place le corps dans l'un des plateaux et on l'équilibre d'une manière quelconque, par exemple en mettant de la grenaille de plomb dans l'autre plateau jusqu'à ce que le fléau devienne horizontal ; c'est ce qu'on appelle faire la *tare*. Ceci fait, on enlève le corps et on le remplace par des poids marqués. Le total des poids marqués nécessaires pour ramener l'équilibre est le poids du corps. C'est évident, car dans les deux cas le corps et les poids marqués font équilibre dans les *mêmes* conditions à la *même* tare.

234. ***Balance romaine.*** — La balance romaine est une balance dans laquelle on pèse les corps avec un poids invariable. Elle se compose d'un fléau AOB dissymétrique (fig. 154) composé de deux cylindres de diamètres inégaux, celui de diamètre plus petit étant beaucoup plus long que l'autre. L'appareil est suspendu par un crochet M en un point O assez rapproché du gros cylindre auquel est suspendu en A le corps à peser P.

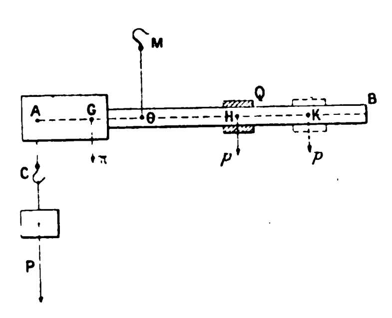


Fig. 154.

Sur le grand bras du levier se déplace un curseur Q dont le poids p est destiné à équilibrer le poids du corps P à peser. Ce curseur glissant sur le levier ne restera en équilibre que lorsque le levier sera sensiblement horizontal.

Soit G la position du centre de gravité de l'appareil avant qu'on lui ait adapté le curseur mobile Q et supposons que, aucun poids n'étant mis au crochet C, on doive placer le poids p du curseur mobile en un certain point H pour que le fléau se trouve horizontal.

Il y aura équilibre entre le poids π du fléau appliqué en G et le poids p.

On aura donc, en prenant les moments par rapport au point O,

$$\pi \times OG = p \times OH. \qquad (1)$$

Plaçons au crochet C un corps de poids P, l'équilibre sera détruit, et pour le rétablir, il faudra faire glisser

le poids p en un point K tel que l'on ait

$$P \times AO + \pi \times OG = p\,(OH + HK). \qquad (2)$$

Mais on vient de trouver que

$$\pi \times OG = p \times OH\,;$$

donc l'égalité (2) devient, en supprimant dans les deux membres ces quantités égales,

$$P \times OA = p \times HK.$$

D'où l'on tire

$$P = \frac{p}{OA} \times HK.$$

OA et p étant des constantes, la longueur HK varie proportionnellement au poids P.

En d'autres termes *le poids* P *est proportionnel au déplacement* HK *du curseur.*

D'après cela, pour graduer la balance romaine, on marquera zéro au point H où il faut placer le poids p pour que le fléau reste horizontal lorsque le crochet C ne supporte aucun poids; puis on placera au crochet le poids que l'on veut prendre pour unité, le kilogramme par exemple, et l'on fera glisser le poids p jusqu'en un point K tel qu'il y ait équilibre. On marquera 1 en ce point et l'on portera, à la suite, sur le fléau des longueurs successives égales chacune à HK aux extrémités desquelles on inscrira les nombres 2, 3, 4...

Si, pour amener le fléau horizontal, il a fallu mettre le curseur Q à la division 9 par exemple, le poids du corps accroché en C sera de 9 kilogrammes.

§ 2. — Poulies et Treuil

235. ***Poulies.*** — Une *poulie* se compose d'un disque circulaire sur la circonférence duquel est creusée une gorge destinée à recevoir une corde. Le disque est traversé en son centre par un axe perpendiculaire à son plan et dont les extrémités reposent sur deux coussinets ou bien (fig. 155) s'engagent dans les deux branches parallèles d'une monture ou chape, de telle sorte que la poulie peut tourner librement autour de cet axe qui d'ailleurs peut faire corps avec le disque ou bien en être indépendant.

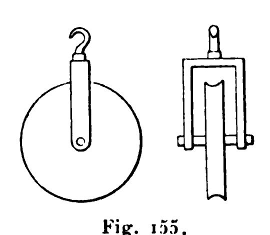


Fig. 155.

236. ***Tension d'une corde.*** — Considérons une corde AB (fig. 156) soumise à deux forces F et F′ appliquées à ses extrémités A et B. Si la corde est en équilibre, elle le sera à plus forte raison si on imagine qu'elle

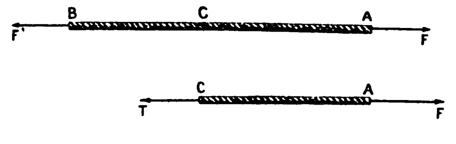


Fig. 156 et 157.

soit solidifiée de façon à la transformer en une barre rigide. Dans ces conditions, si on fait abstraction de son poids, on a là un corps solide qui n'est soumis qu'à deux forces F et F′; il ne peut être en équilibre que si ces deux forces sont égales et directement opposées. On en conclut qu'il faut que les deux forces

F et F′ soient égales, dirigées suivant la droite AB et directement opposées.

Si, de plus, on tient compte de ce que la corde est flexible, il est clair qu'il faut, en outre, que les deux forces F et F′ soient dirigées, comme l'indique la figure, de façon à tendre la corde.

Imaginons maintenant qu'on coupe la corde AB en un point C (fig. 156). Si l'on veut maintenir l'équilibre du brin CA il faudra appliquer en C une certaine force T. Le brin CA (fig. 157) étant alors en équilibre sous l'influence des deux forces F et T, les deux forces F et T sont égales et directement opposées. T est ce qu'on appelle la *tension* de la corde en C et on voit que T est toujours égale à F quel que soit le point C choisi. On verrait de même que pour maintenir le brin BC il faudrait appliquer en C une force T′ égale et directement opposée à F′. Comme F et F′ sont égales et directement opposées entre elles, il en est de même de T et T′.

Ceci conduit aux conclusions suivantes :

On appelle tension d'une corde en un point la valeur commune des deux forces égales et directement opposées qu'il faudrait appliquer en ce point, si on la coupait, pour maintenir en équilibre les deux parties de la corde.

La tension d'une corde tendue librement est la même en tous les points de la corde.

Ces conclusions ne sont exactes que si la corde est assez légère pour qu'on puisse négliger son poids propre vis-à-vis des forces auxquelles elle est soumise.

237. ***Poulie fixe.*** — Dans la *poulie fixe* la chape OM (fig. 158) est fixée par un crochet au point M. Aux

extrémités de la corde BA qui passe dans la gorge sont appliquées deux forces dont l'une est la résistance R à vaincre, appliquée en B, et l'autre la puissance P, appliquée en A.

Si l'on admet que la corde ne glisse pas dans la gorge on doit considérer la portion A′B′ de cette corde qui est engagée dans la poulie comme faisant corps avec elle. La corde transmet alors intégralement à la poulie les tensions auxquelles elle est soumise aux points où elle la touche.

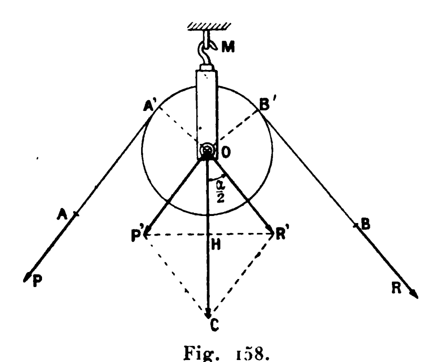


Fig. 158.

D'après ce que nous avons vu (n° **236**) la tension du brin de corde AA′ en A′ est égale à P, et la tension du brin BB′ en B′ est égale à R.

Tout se passe donc comme si la poulie, qui est un corps mobile autour d'un axe O, était soumise à deux forces égales à P et R appliquées en A′ et B′ et tangentes à sa circonférence. Pour qu'il y ait équilibre il faut (n° **99**) que la somme algébrique des moments des forces par rapport au point O soit nulle : le moment de la puissance est $P \times OA'$, le moment de la résistance est $R \times OB'$; on doit donc avoir

$$P \times OA' = R \times OB'$$

et, comme

$$OA' = OB',$$

on en tire

$$P = R.$$

Donc, dans la poulie fixe, la puissance est égale à la résistance.

238. Pression supportée par l'axe. — Transportons les forces P et R parallèlement à elles-mêmes au point O et composons-les en une seule C représentée par la diagonale OC du losange OR'CP'. La *charge* de l'axe est la valeur de C.

Soit $\frac{\alpha}{2}$ l'angle R'OC, et menons la diagonale P'R'. La figure OR'CP' étant un losange, le point H est le milieu de P'R' et de OC. On a donc

$$C = 2.OH. \qquad (1)$$

Dans le triangle rectangle OR'H on a

$$OH = OR' \cos \widehat{R'OH}.$$

Mais, comme

$$OR' = R' = R = P,$$

on a

$$OH = P \cos \frac{\alpha}{2} = R \cos \frac{\alpha}{2}$$

et la relation (1) devient

$$C = 2 P \cos \frac{\alpha}{2}, \qquad (2)$$

formule qui donne la pression supportée par l'axe.

REMARQUE. — Si les deux cordons AA′, BB′ sont parallèles, les forces P′ et R′ sont parallèles et la résultante C est égale à $P' + R'$ ou à 2 P.

C'est le cas de $\alpha = 0$; alors

$$\cos \alpha = 1$$

et

$$C = 2P.$$

C'est dans cette circonstance que l'axe fatigue le plus; car dans tous les autres cas on a

$$C < 2P.$$

239. ***Poulie mobile.*** — Dans cette poulie (fig. 159), le poids R à soulever est suspendu à la chape ; la corde qui s'enroule sur la gorge de la machine est attachée d'une part à un point fixe B et est sollicitée de l'autre par une force P destinée à faire équilibre au poids R.

Fig. 159.

Si on coupait la corde BB′ en un point quelconque I il faudrait appliquer en ce point une force Q pour maintenir le système en équilibre. Cette force Q est la tension de la corde BB′. On peut donc considérer le système comme libre et sollicité par trois forces P, Q, R dirigées suivant les droites CC′, OK, BB′ et situées dans un même plan.

Comme plus haut, les tensions des brins CC′ et BB′ en C′ et B′, qui sont respectivement égales à P et Q, se transmettent intégralement à la poulie.

L'action de la chape sur la poulie, abstraction faite de son poids, est égale à R. De telle sorte que la poulie peut être considérée comme un corps solide libre soumis à trois forces P, Q, R appliquées en C′, B′ et O.

Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que la somme des projections des forces sur deux axes rectangulaires soit nulle et que la somme algébrique des moments des forces par rapport à un point quelconque soit nulle (n° **91**).

Menons deux axes rectangulaires Ox, Oy passant par le centre de la poulie et supposons Ox horizontal.

Les forces P, R, Q se faisant équilibre, l'une quelconque R est égale et directement opposée à la résultante des deux autres (n° **34**). Les directions CC′, BB′ prolongées, iront donc se rencontrer en un certain point K de la verticale OR et la résultante des forces P et Q sera dirigée suivant cette droite.

Faisons la somme algébrique des moments des forces par rapport au point O, on a

$$\mathfrak{M}_0 P + \mathfrak{M}_0 Q + \mathfrak{M}_0 R = 0. \tag{1}$$

Or, si r est le rayon de la poulie,

$$\mathfrak{M}_0 P = P \times OC' = P \times r,$$
$$\mathfrak{M}_0 Q = - Q \times OB' = - Q \times r,$$
$$\mathfrak{M}_0 R = 0,$$

puisque R passe par O.

La relation (1) devient

$$Pr - Qr = 0.$$

d'où

$$P = Q.$$

Les forces P et Q étant égales, la direction OK de leur résultante est la bissectrice de l'angle BKC. Soit α l'angle OKB'; écrivons que la somme des projections des forces sur l'axe Oy est nulle et nous aurons

$$P \cos\alpha + Q \cos\alpha - R = 0$$

et, comme $P = Q$,

$$2 P \cos \alpha - R = 0$$

ou

$$2 P \cos\alpha = R,$$

qui est la condition d'équilibre cherchée.

On tire de là la valeur de P en fonction de R

$$P = \frac{R}{2 \cos \alpha}.$$

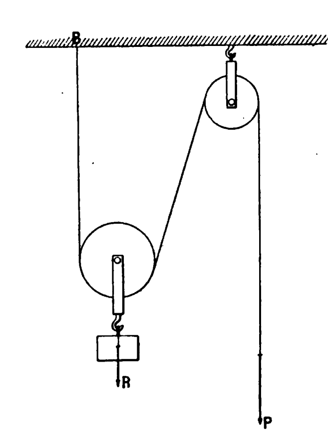


Fig. 160.

Comme on a

$$\cos \alpha \leq 1$$

on a

$$P \geq \frac{R}{2}$$

La puissance est toujours plus grande que la moitié de la résistance, sauf lorsque les cordons sont parallèles, auquel cas la puissance est égale à la moitié de la résistance.

Dans la pratique on se sert d'une poulie intermé-

diaire (fig. 160); la relation reste la même puisque nous avons vu que dans la poulie fixe la puissance est égale à la résistance.

240*. ***Travail dans la poulie.*** — POULIE FIXE. — Tandis que le point d'application de la puissance P parcourt, suivant la direction de cette force, un certain chemin α, le point d'application de la résistance R parcourt sur la direction de celle-ci un chemin égal. Le travail de la puissance est $P \times \alpha$ et le travail de la résistance est $R \times \alpha$. Mais on a

$$P = R$$

et, par suite,

$$P\alpha = R\alpha\,;$$

le travail moteur est égal au travail résistant.

POULIE MOBILE. — Supposons les cordons parallèles, on a alors

$$P = \frac{R}{2}.$$

Si l'on déplace la puissance de P en P′ de façon que son point d'application aille de B en B′ (fig. 161), le diamètre MM′ de la poulie vient en NN′.

Écrivons que la longueur de la corde est la même dans les deux cas. On en conclut

$$BB' = MN + M'N' = 2MN = 2\alpha,$$

en désignant par α le chemin OO′ décrit par O.

Le travail de la puissance est $P \times 2\alpha$; et celui de la résistance est $R \times \alpha$.

Puisque $P = \frac{R}{2}$, on a

$$P \times 2\,\alpha = R \times \alpha,$$

ce qui exprime que le travail moteur est égal au travail résistant.

Fig. 161.

241. Moufles et Palans. — On appelle *moufle* un ensemble de plusieurs poulies, montées dans une même chape. Ces poulies peuvent avoir des axes différents (fig. 162) ou le même axe (fig. 163).

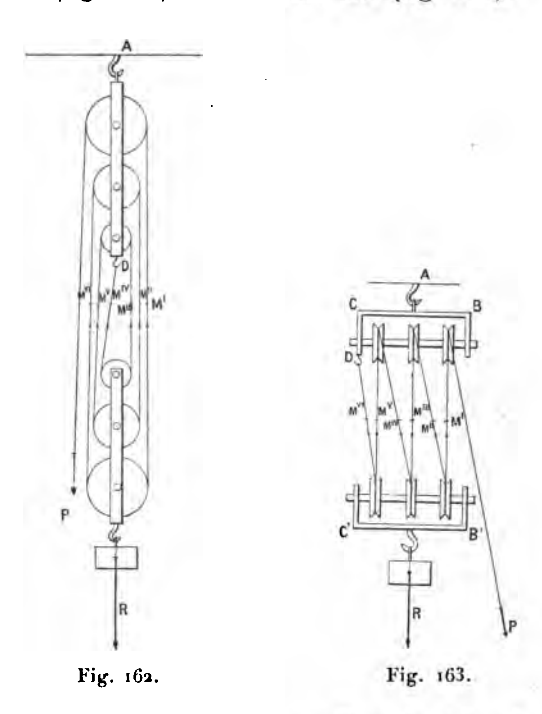


Fig. 162. Fig. 163.

Considérons deux moufles, l'un dont la chape est fixée en un point A (fig, 162 et 163) l'autre, mobile, relié au premier par une corde et dont la chape porte le poids R. Cette corde est fixée par une de ses extrémités D à la chape fixe et s'enroule alternativement sur les poulies des deux moufles. La puissance P est appliquée à son extrémité libre.

Un ensemble de deux moufles ainsi disposés se nomme un *palan*.

Nous avons vu dans la théorie de la poulie que la tension de la corde est partout la même et, par suite, égale à P dans le cas présent.

Or, si on coupait les six brins qui supportent le moufle inférieur en M^{I} M^{II} M^{III} M^{IV} M^{V} et M^{VI} il faudrait pour maintenir le moufle en équilibre appliquer en ces points 6 forces égales aux tensions de ces brins c'est-à-dire égales à P.

Ces 6 forces égales à P, que nous supposerons parallèles, ont une résultante égale à leur somme et qui maintient en équilibre la force R, on a donc

$$6P = R$$

d'où
$$P = \frac{R}{6}.$$

La puissance est donc égale au quotient de la résistance par le nombre des poulies.

D'une façon générale, s'il y a $2n$ poulies dans les deux moufles, on a

$$P = \frac{R}{2n}.$$

242*. *Travail dans le palan.* — P étant la puissance, R la résistance et $2n$ le nombre des cordons, on a dans le cas de l'équilibre

$$P = \frac{R}{2n}.$$

Or, tandis que la résistance, ou poids à soulever R, se déplace de α, le point d'application de la puissance P se déplace de $2n\alpha$. Le travail de la puissance est $P \times 2n\alpha$ et le travail de la résistance est $R\alpha$. Or, on a, puisque $P = \frac{R}{2n}$,

$$P \times 2n\alpha = R\alpha.$$

Le travail moteur est donc égal au travail résistant.

243. *Treuil.* — On nomme *treuil* une machine simple formée d'un cylindre appelé *arbre* terminé à ses deux extrémités par deux autres cylindres de même axe que lui et d'un rayon moindre nommés *tourillons*. Les tourillons reposent sur deux supports ou *coussinets*. Une corde destinée à supporter le poids à soulever est attachée à l'un des points de l'arbre sur lequel elle peut s'enrouler. La puissance est appliquée à la machine, soit au moyen d'une ou plusieurs barres fixées normalement au cylindre, soit à l'aide d'une roue d'un rayon plus grand que celui du cylindre, soit encore à l'aide d'une manivelle fixée à l'une des extrémités de l'arbre. Supposons (fig. 164) le

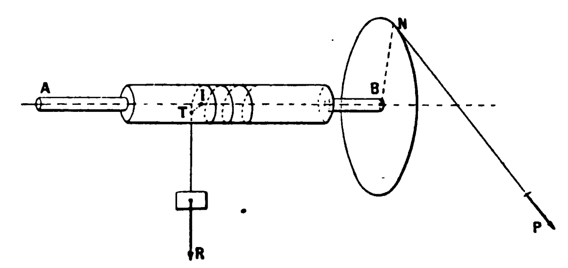


Fig. 164.

treuil en équilibre ; il est sollicité par deux forces : la puissance P agissant dans un plan perpendiculaire à l'axe AB tangentiellement à la circonférence de centre B décrite par son point d'application N, et la résistance R appliquée en T et dirigée tangentiellement à l'arbre.

Désignons par b le rayon BN de la manivelle et par r le rayon IT de l'arbre. Écrivons que la somme algébrique des moments des forces par rapport à l'axe AB est nul, et nous avons

$$P \times b - R \times r = o; \qquad (1)$$

d'où nous tirons

$$P = R\frac{r}{b}.$$

On voit ainsi que *dans un treuil en équilibre, la puissance est égale à la résistance multipliée par le rapport du rayon de l'arbre au rayon de la circonférence que décrit le point d'application de la puissance.*

Ici encore la puissance est plus petite que la résistance.

244*. *Travail dans le treuil.* — Soient P la puissance et R la résistance. Si le treuil tourne autour de son axe d'un angle α, le point d'application de la puissance décrit un arc égal à $b\alpha$ et le travail de la puissance est $P \times b\alpha$. Mais pendant ce temps, l'arbre ayant tourné de l'angle α il s'est enroulé sur lui une longueur de corde égale à $r\alpha$ et le poids R s'est élevé de $r\alpha$. Le travail de la résistance est donc $Rr\alpha$.

Comme il y a équilibre, on a d'après la relation (1)

$$P \times b = R \times r$$

ou, en multipliant les deux membres par α,

$$P \times b\alpha = R \times r\alpha.$$

Ce qui exprime que le travail moteur est égal au travail résistant.

§ 3. — Frottement. Applications

245. *Définition.* — Lorsqu'un corps repose sur une surface quelconque et qu'on cherche à le faire glisser sur cette surface, on reconnaît que l'on éprouve une certaine difficulté à le déplacer. Cette résistance que

l'on éprouve est due à ce que l'on nomme le *frottement;* elle provient surtout de ce que les aspérités que présentent toujours les surfaces les mieux polies s'engagent les unes dans les autres.

246. ***Lois du frottement au départ.*** — Les lois du frottement ont été étudiées par Coulomb en 1781. Sur une table horizontale (fig. 165) reposait une boîte creuse ayant la forme d'un parallélépipède dans laquelle on pouvait mettre des charges différentes. En un point A de la boîte était attachée une corde qui, passant sur une poulie B, supportait à son autre extrémité un plateau C dans lequel on pouvait mettre des poids Q. La tension tout le long de la corde étant la même, tout se passait comme si l'on tirait la boîte au point A avec une force Q suivant la direction AB.

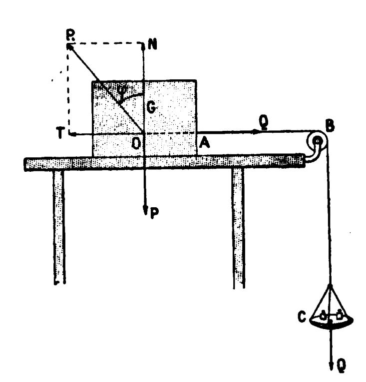


Fig. 165.

Les forces qui agissent sur la boîte sont donc : La force Q qui tend à déplacer le corps de gauche à droite, le poids P de la boîte et de sa charge qui maintient la boîte en contact avec la table, et enfin la réaction de la table sur la base du corps.

Coulomb faisait varier la force Q en augmentant les poids mis dans le plateau C jusqu'à ce que la boîte se mette en mouvement. Appelons F la limite de la force Q, c'est-à-dire la valeur de cette force au moment où le mouvement a lieu.

Dans l'expérience de Coulomb :

lorsque $Q < F$ le corps ne bouge pas ;

lorsque $Q > F$ le corps se met en mouvement.

Coulomb observa en faisant varier P, que F est proportionnel à P, c'est-à-dire que le rapport $\frac{F}{P}$ est constant. Ce rapport constant entre F et P se nomme le *coefficient de frottement au départ.*

Coulomb changea de boîte et refit son expérience pour différentes surfaces et il constata que le *frottement est indépendant de l'étendue des surfaces en contact* et qu'il ne dépend que de la nature des corps qui frottent et de leur état de polissage.

En d'autres termes, si on pose

$$\frac{F}{P} = f, \tag{1}$$

f, qui est le coefficient de frottement, est un nombre qui ne dépend pas de l'étendue des surfaces en contact, mais seulement de leur nature.

Interprétons maintenant l'expérience précédente. Considérons un moment de l'expérience de Coulomb où l'on a

$$Q < F.$$

Il y a alors équilibre et, comme la relation (1) donne

$$F = Pf,$$

on peut écrire

$$Q < Pf. \tag{2}$$

Le corps est soumis aux deux forces P, Q, et à la réaction R de la table sur le corps. Cette réaction est égale et opposée à la résultante des forces P et Q puisqu'il y a équilibre. Cette réaction OR que nous

transportons en O peut se décomposer en deux forces, l'une ON normale aux surfaces en contact, l'autre OT parallèle au plan de ces surfaces et qui s'oppose au mouvement.

Les forces N et P étant directement opposées ainsi que les forces T et Q, il ne peut y avoir équilibre que si on a : $N = P$ et $T = Q$.

La réaction R a donc deux composantes, l'une N normale aux surfaces en contact et égale à la charge du corps sur le plan, l'autre T appelée *composante tangentielle* ou *force de frottement*, située dans le plan de contact et égale à la force avec laquelle on tire le corps.

Puisque $T = Q$, l'inégalité (2) peut s'écrire

$$T < Pf$$

ou, puisque $N = P$,

$$T < Nf;$$

d'où on tire

$$\frac{T}{N} < f.$$

Ceci conduit à la conclusion suivante :

Pour qu'un corps reposant sur un plan, soit en équilibre, il faut que la réaction du plan que l'on calculerait en supposant l'équilibre possible soit telle que le rapport de la composante tangentielle à la composante normale, soit inférieur ou au plus égal au coefficient de frottement.

Si ce rapport est plus petit que le coefficient de frottement, il ne peut pas y avoir de mouvement.

S'il est égal au coefficient de frottement, on est à la limite de l'équilibre ; c'est le moment où le mouvement peut commencer.

Il faut donc toujours distinguer deux cas :

1° $\frac{T}{N} < f$; *équilibre.*

2° $\frac{T}{N} = f$; *limite de l'équilibre.*

Nous supposons implicitement dans cet énoncé que toutes les forces qui agissent sur le corps ont une résultante unique de telle sorte qu'on puisse admettre qu'il existe une réaction *unique* égale et directement opposée à cette résultante.

La condition nécessaire que nous venons d'énoncer est évidemment suffisante, car si elle est remplie on est dans les conditions de l'expérience de Coulomb et il y a équilibre.

247. *Angle de frottement.* — Soit φ l'angle RON que fait la réaction OR avec la normale ON au plan, à la limite de l'équilibre.

Le triangle rectangle RON (fig. 165) donne

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{RN}{ON},$$

Or, $RN = T$ et $ON = N$. On a donc

$$\frac{T}{N} = \operatorname{tg} \varphi,$$

d'ailleurs, puisqu'on est à la limite de l'équilibre

$$\frac{T}{N} = f$$

on en conclut

$$\operatorname{tg} \varphi = f.$$

L'angle φ défini par cette égalité est ce qu'on appelle *l'angle de frottement*.

L'angle de frottement est donc l'angle de la réaction avec la normale pour lequel le glissement prend naissance.

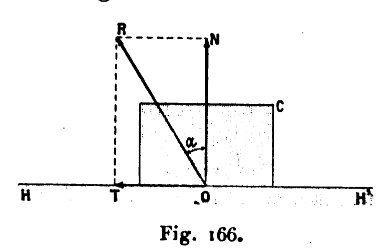


Fig. 166.

Considérons un corps C, reposant sur un plan HH' (fig. 166), et en équilibre. Soit OR la réaction du plan HH' ; décomposons-là en deux forces ON et OT, l'une normale au plan, l'autre tangentielle. On a dans le triangle rectangle RON

$$\frac{T}{N} = \operatorname{tg} \alpha,$$

en appelant α l'angle $\widehat{RON}$.

Le corps étant en équilibre, on a

$$\frac{T}{N} \leqq f = \operatorname{tg} \varphi$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{tg} \alpha \leqq \operatorname{tg} \varphi$$

d'où

$$\alpha \leqq \varphi.$$

Ceci permet d'énoncer les lois de l'équilibre avec frottement d'une nouvelle manière.

Un corps reposant sur un plan sera en équilibre si l'angle que forme la réaction avec la normale au plan est inférieur ou au plus égal à l'angle de frottement.

Pour que le mouvement soit possible, il faut que les deux angles soient égaux.

248. Application. — *Équilibre d'un corps pesant reposant sur un plan incliné en tenant compte du frottement du corps sur le plan.*

Considérons (fig. 167) un corps pesant, de centre de gravité G et de poids P, reposant sur un plan incliné d'un angle α sur l'horizon. Le corps est soumis à deux forces, la force P et la réaction du plan. Il y aura équilibre si ces deux forces sont égales et directement opposées. La réaction est donc appliquée au point I où la verticale du poids P rencontre le plan incliné et elle est directement opposée au poids P. Soit IR cette réaction.

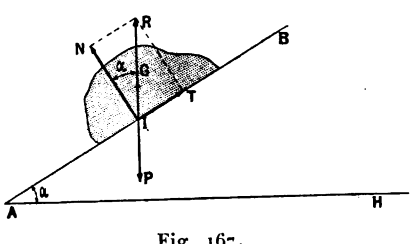


Fig. 167.

L'angle $\widehat{NIR}$ qu'elle fait avec la normale IN est égal à l'angle $\widehat{BAH}$ ou α, car ces deux angles ont leurs côtés perpendiculaires.

D'après ce qui précède (n° **247**) pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\alpha \leqq \varphi,$$

φ étant l'angle de frottement.

Donc *pour qu'un corps reposant sur un plan incliné soit en équilibre, il faut et il suffit que l'inclinaison du plan soit plus petite que l'angle de frottement du corps sur le plan.*

On a déduit de là un procédé simple pour mesurer les coefficients de frottement des diverses substances les unes sur les autres.

On prend un plan formé de l'une des substances qu'on soumet à l'expérience. Ce plan tourne autour d'une charnière A et on règle son inclinaison, à l'aide d'une vis qui le traverse et s'appuie sur le plan horizontal AH (fig. 168). On le rend d'abord presque horizontal et on y place le corps dont on veut trouver le coefficient de frottement; puis on tourne la vis lentement jusqu'à ce que le corps glisse. A ce moment précis, on mesure l'angle d'inclinaison α et on calcule tg α; on a ainsi le coefficient cherché.

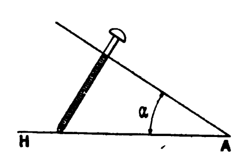


Fig. 168.

On a fait des expériences sur toutes les substances connues et on a déterminé leurs coefficients de frottement qui ont été rassemblés dans des tables spéciales.

Voici quelques valeurs du coefficient f:

CORPS EN CONTACT	f
Bois sur bois à sec	0,53
Bois sur bois graissé	0,44
Fer sur bronze à sec	0,29
Pierre sur bois	0,60
— sur fer	0,45
— sur béton	0,76
— sur ardoise	0,53

249. ***Plan incliné servant de machine simple.*** — Supposons un corps solide placé sur un plan incliné (fig. 169), et soumis à une force F, parallèle à une ligne de plus grande pente du plan, qui tend à le faire monter le long du plan.

Supposons, en outre, que la ligne d'action de la

force F rencontre la verticale passant par le centre de gravité G du corps en un point I.

Prenons pour plan de la figure le plan qui contient la force F et la verticale GP. D'après nos hypothèses ce plan coupe le plan incliné suivant une ligne de plus grande pente AB. Soit α l'angle d'inclinaison de cette ligne AB sur l'horizontale AH.

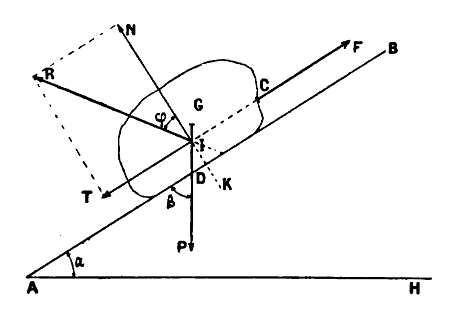


Fig. 169.

Le corps est soumis à trois forces : son poids P appliqué au centre de gravité G, la force F et la réaction du plan. Cette réaction passe par l'intersection I des deux forces P et F et nous pouvons supposer son point d'application transporté en ce point.

Elle a deux composantes N et T, l'une normale et l'autre parallèle au plan incliné.

Comme nous sommes dans le cas de l'équilibre limite, c'est-à-dire au moment où le corps va se mettre en mouvement, on a

$$\frac{T}{N} = f = \operatorname{tg} \varphi, \qquad (1)$$

φ étant l'angle que fait la réaction du plan IR avec la normale IN.

Ceci posé, écrivons que la somme des projections

des forces sur AB et sur IN est nulle, puisque les forces se font équilibre. On a, en projetant sur AB,

$$T - F + P \cos \beta = 0$$

en posant $\widehat{ADP} = \beta$ et, comme les angles α et β sont complémentaires, on a

$$\cos \beta = \sin \alpha$$

d'où :

$$T - F + P \sin \alpha = 0$$

et

$$T = F - P \sin \alpha.$$

En projetant sur IN, il vient :

$$N - P \cos \alpha = 0,$$

car l'angle KIP est égal à α (côtés perpendiculaires) ; et on tire de là

$$N = P \cos \alpha.$$

en portant ces valeurs de T et N dans la relation (1) il vient

$$\frac{F - P \sin \alpha}{P \cos \alpha} = f$$

ou

$$F = P \sin \alpha + f P \cos \alpha,$$

$$F = P (\sin \alpha + f \cos \alpha). \qquad (1)$$

Ce qui donne la force F en fonction de P, de α et du coefficient de frottement f.

Donc, *pour faire monter le corps sur le plan, il faut le tirer avec une force F égale à P* ($\sin \alpha + f \cos \alpha$).

Lorsque l'angle d'inclinaison α est petit, cette force F est plus petite que P.

En particulier, lorsque $\alpha = 0$, on est dans le cas de l'expérience de Coulomb, le plan est horizontal, et F est égale à P *f*.

250. ***Poussée des terres.*** — Considérons un massif de terre soutenu par une paroi verticale AB (fig. 170). Si nous enlevons cette paroi, la terre s'éboule ; ses

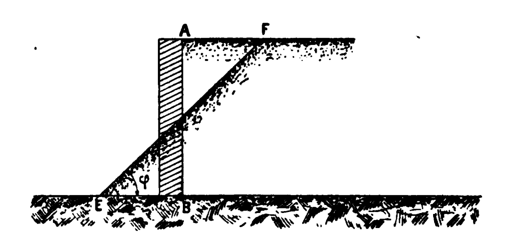


Fig. 170.

molécules glissent les unes sur les autres, jusqu'à ce qu'un talus EF se soit formé. Ce talus EF s'appelle *le talus naturel des terres*. Il fait avec l'horizon un angle φ, lequel est constant, quelle que soit la hauteur du remblai et ne dépend que de la nature, de l'état de division et de la sécheresse de la terre.

Cet angle φ est *l'angle de frottement des terres sur elles-mêmes*. Si en effet on considère (fig. 171) un talus de terre BC faisant avec l'horizon un angle α, si α est plus grand que φ le talus s'éboule ce qui veut dire que tout grain *m* de terre placé sur le talus roule vers le bas. Si au contraire α est plus petit que φ le talus ne bouge pas ; toute parcelle *m* de terre placée sur le talus y reste. La parcelle de terre *m* placée sur le talus peut être assimilée à un

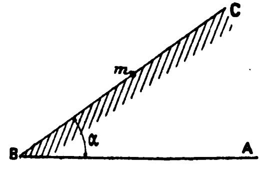


Fig. 171.

corps reposant sur un plan incliné. Si on se reporte, alors, aux résultats établis au n° **248**, on voit que l'angle φ étant l'angle limite pour lequel la parcelle *m* reste en équilibre sur le talus, φ est l'angle de frottement de cette parcelle sur le talus, c'est-à-dire l'angle de frottement de la terre sur elle-même.

Lorsqu'on veut maintenir des terres sous un angle plus grand que celui du talus naturel, elles exercent sur le mur qui les soutient une poussée dont il importe de connaître l'intensité et le point d'application, en construction.

251. Plan de rupture. — Considérons un terre-plein soutenu par un mur et prenons la portion de ce terre-plein comprise entre deux plans verticaux parallèles perpendiculaires au mur ; nous prendrons pour plan de notre figure (fig. 172) le plan vertical parallèle aux deux plans qui limitent le terre-plein et équidistant de ces deux plans. Ce plan de figure coupe le parement intérieur du mur suivant la droite AB, le sol indéfini suivant l'horizontale HH′ et la surface supérieure du terre-plein suivant la ligne $cc_1c_2...$ TM.

Nous désignerons dorénavant, un plan quelconque perpendiculaire au plan de la figure par sa trace sur ce plan.

Ceci posé, soit AT le *talus naturel* des terres. Toute la terre qui se trouve au-dessous de ce talus dans l'angle TAH tient sans le secours du mur. Au contraire, celle qui se trouve dans l'angle BAT est soutenue par le mur.

Si on supprimait brusquement le mur, la masse de terre comprise dans l'angle BAT ne s'éboulerait pas tout d'une pièce mais commencerait par se rompre en deux parties dont la première tomberait tout d'un

bloc tandis que la seconde s'écroulerait lentement comme un liquide qui s'écoule.

Nous *admettrons* que la surface de séparation de ces deux parties est un plan AX (fig. 172) que nous appellerons le *plan de rupture.*

Le plan de rupture AX, par sa définition même, partage donc la portion de terre *c*AT en deux parties dont l'une *c*AX s'appuie sur le mur et l'autre XAT s'appuie sur le talus naturel : c'est la partie *c*AX seule qui produit donc la poussée sur le mur. En d'autres termes, la poussée sur le mur est la même que si la terre se composait de deux parties *c*AX et XAH *solides.*

Tout revient donc à déterminer la position du plan de rupture AX.

252. Détermination du plan de rupture et de l'intensité de la poussée. — Imaginons qu'on considère un plan variable perpendiculaire au plan de la figure et passant par A. Une position quelconque de ce plan, dans l'angle *c*AT, partage le terre-plein en deux portions que nous considérerons comme solidifiées. Examinons, pour ces diverses positions, la poussée qui en résulterait sur le mur.

AX désignant toujours la ligne de rupture, si le plan occupe une position AY dans l'angle *c*AX, le prisme *c*AY qui pousse sur le mur est plus petit que le prisme *c*AX, il donnera donc une poussée *plus petite* que celle que produit CAX. Si, au contraire, le plan est en AZ au-dessous du plan de rupture, dans l'angle XAT, le prisme qui pousse *c*AZ est plus grand que *c*AX mais, malgré cela, il produira sur le mur une poussée *plus petite* que celle de *c*AX.

En effet, le prisme *c*AZ se compose de deux par-

ties l'une cAX qui pousse sur le mur, l'autre XAZ qui s'appuie sur la terre. Puisque nous considérons

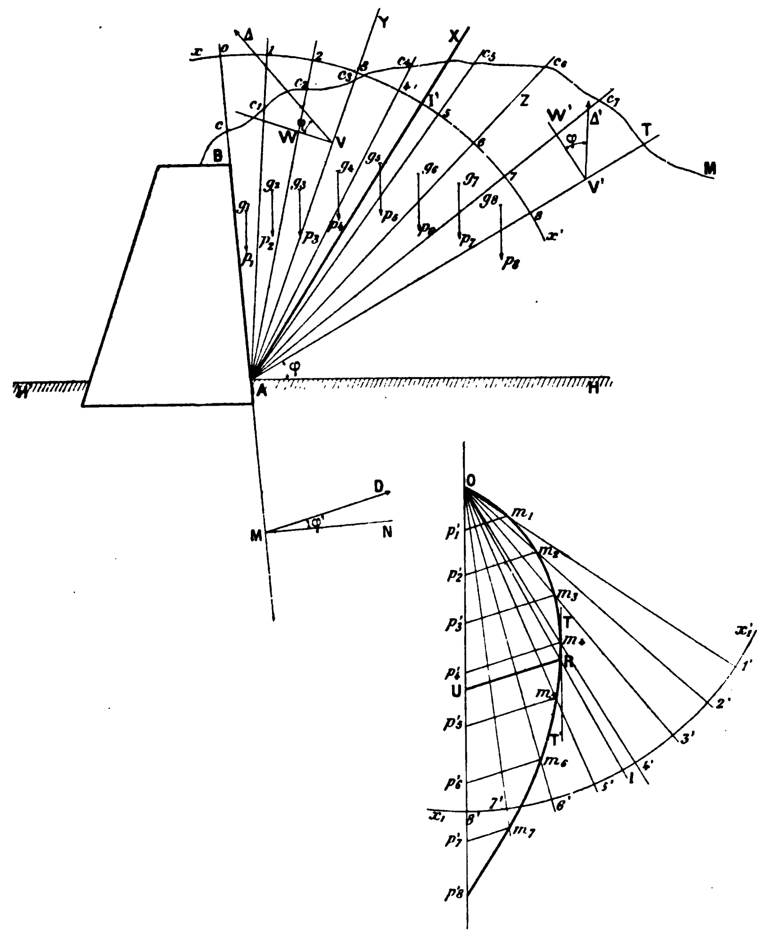


Fig. 172.

ces deux parties comme solidaires, la partie XAZ qui s'appuie sur la terre retiendra partiellement la partie cAX, ce qui diminuera la poussée de celle-ci sur le mur.

En résumé, pour toute position du plan dans l'angle cAT, la poussée produite sur le mur par la partie située au-dessus de ce plan et *supposée solidifiée* est *plus petite* que la poussée réelle que nous cherchons, produite par le prisme de rupture.

On en conclut que : *le plan de rupture* AX *est celui pour lequel la poussée produite par le prisme situé au-dessus et supposé solidifié est maxima.*

Cette poussée maxima est la poussée réelle des terres sur le mur.

Ceci posé, du point A comme centre décrivons un arc de cercle xx' et partageons-le, entre les points x et x', en un certain nombre de parties égales, huit par exemple ; joignons les points de divisions 1, 2, 3, 4... au point A, et nous divisons ainsi le prisme cAT en un certain nombre de prismes $c\mathrm{A}c_1$, $c_1\mathrm{A}c_2$, $c_2\mathrm{A}c_3$.

Les poids de ces prismes s'obtiennent en multipliant respectivement les surfaces $c\mathrm{A}c_1$, $c_1\mathrm{A}c_2$... par la profondeur du terre-plein et par la densité de la terre. Ces poids sont donc proportionnels aux surfaces $c\mathrm{A}c_1$, $c_1\mathrm{A}c_2$... Soient g_1, g_2, g_3,... les centres de gravité de ces prismes. Comme le centre de gravité d'un prisme coïncide avec celui de sa section moyenne, les points g_1, g_2, g_3,... sont faciles à construire car ce sont les centres de gravité des triangles $c\mathrm{A}c_1$, $c_1\mathrm{A}c_2$, $c_2\mathrm{A}c_3$,... En ces points sont appliqués les poids p_1, p_2, p_3... des divers prismes qui sont proportionnels aux aires des triangles.

Imaginons alors que le plan variable passant par A occupe, successivement, les positions $\mathrm{A}c_1$, $\mathrm{A}c_2$, $\mathrm{A}c_3$, etc., et construisons, pour chacune de ces positions, la poussée correspondante du prisme de terre situé au-dessus.

Voici, par exemple, la construction que donne la

statique graphique lorsque le plan variable AY coïncide avec Ac_3.

Il s'agit de trouver la poussée produite par le prisme cAc_3, supposé solide, sur le mur.

On peut considérer ce prisme comme soumis à cinq forces : les forces p_1, p_2, p_3 appliquées aux centres de gravité g_1, g_2, g_3, des prismes partiels, la réaction du mur et la réaction de la terre c_3AH sur lui. Ces deux dernières réactions sont connues *en direction*.

En effet, soit φ' l'angle de frottement des terres sur le mur : la direction de la réaction du mur est une direction MD faisant l'angle φ' avec la normale MN au mur[1].

D'autre part, soit φ l'angle d'inclinaison du talus naturel AT, φ est aussi l'angle de frottement des terres sur elles-mêmes et par suite la réaction de la terre sur le prisme le long de Ac_3 a une direction VΔ faisant l'angle φ avec la normale VW à Ac_3.

Pour avoir les intensités de ces deux réactions nous n'avons qu'à faire la construction suivante : par un point O arbitraire portons bout à bout les poids p_1, p_2, p_3 des trois prismes partiels, la longueur op'_3 ainsi obtenue est le poids du prisme total c_3Ac_3. Par p'_3 et O menons des parallèles aux droites MD et VΔ qui se coupent en un point m_3. Le dynamique $op'_3\, m_3$ donne les réactions cherchées ; la poussée du prisme cAc_3 sur le mur est donnée par p'_3m_3, la réaction le long de la ligne séparative Ac_3 est donnée par om_3.

Ce que nous venons de faire pour le prisme cAc_3, se fait pour chacun des prismes cAc_1, cAc_2 ..... cAc_7, cAT, et on détermine pour chacun la réaction

[1] Dans la pratique on ignore généralement la valeur de φ', on se place alors dans les conditions les plus défavorables en supposant $\varphi' = 0$.

du mur et la poussée de la terre sur le prisme considéré.

Ces diverses constructions donnent lieu aux remarques qui suivent :

En premier lieu, toutes les réactions $p'_1m_1, p'_2m_2, \ldots$ du mur sont parallèles à la direction fixe MD.

En second lieu, lorsqu'on passe d'une division à la suivante la direction VΔ de la réaction de la terre tourne d'un angle égal à celui dont a tourné le plan de séparation.

Les angles $\widehat{m_1om_2}$ $\widehat{m_2om_3}$, $\widehat{m_3om_4}$, etc., sont donc tous égaux aux angles $\widehat{c_1Ac_2}$, $\widehat{c_2Ac_3}$, $\widehat{c_3Ac_4}$, etc. De plus la direction op'_8 de la réaction de la terre relative au dernier prisme cAT est *verticale*. Car si V′W′ est la normale à AT et V′Δ′ la verticale, l'angle W′V′Δ′ est bien égal à φ puisqu'il a ses côtés perpendiculaires sur ceux de l'angle TAH.

Il en résulte qu'on peut obtenir aisément les directions op'_8, om'_7,... om_1, en menant d'abord la verticale op'_8, puis en la faisant tourner de l'angle α égal à $\widehat{cAc_1}$ une, deux, trois fois, etc.

Ceci conduit, alors, à la construction graphique suivante :

On porte bout à bout en op'_1, $p'_1p'_2$, $p'_2p'_3$, ...$p'_7p'_8$ les poids $p_1, p_2, \ldots p_8$ et par les points p'_1, $p'_2 \ldots p'_7$, p'_8; on mène des parallèles à MD, p'_1m_1, p'_2m_2, ... Puis de O comme centre avec un rayon égal à Ax on trace un arc de cercle x_1 x'_1. A partir du point 8′ où le cercle coupe la verticale des poids op'_8 on porte des arcs 8′7′, 7′6′, 6′5′, ... respectivement aux arcs 87, 76, 76, 65, ... du cercle xx' et on joint les points de divisions au point O. Les droites ainsi menées O1′, O2′, O3′, ... coupent les droites p_1 m_1, p_2m_2, p_3m_3,....

en des points m_1, m_2, m_3, ... et ces points étant joints donnent le lieu des points m.

La rupture correspond à l'endroit de la plus grande poussée; il faut donc chercher le prisme donnant la poussée maxima sur le mur. Ces poussées sont déterminées par les droites p_1m_1, p_2m_2, ...; il suffit donc de chercher celle de ces droites qui est la plus longue. Menons une tangente verticale à la courbe qui est le lieu des points m. Soit TT′ cette tangente dont le point de contact est R.

La poussée maxima est RU. En joignant OR, la droite OR prolongée coupe le cercle $x_1x'_1$, en un point I situé entre les divisions 4′ et 5′. Reportons ce point en I′ sur le cercle xx'; en menant AI′ nous avons la ligne de rupture AX cherchée.

Le prisme CAX pousse seul sur le mur de soutènement avec une force RU donnée en grandeur et en direction.

253. Point d'application de la poussée. — Pour déterminer la position exacte de la poussée que nous

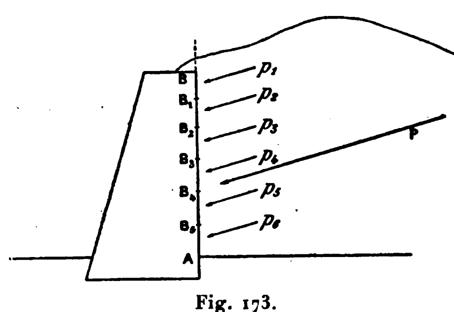


Fig. 173.

connaissons en grandeur et en direction, on pourrait s'y prendre de la façon suivante :

Partageons le parement intérieur du mur AB

(fig. 173) en un certain nombre de parties égales BB_1, B_1B_2, etc.... Déterminons par la construction générale qui précède les poussées sur les hauteurs du parement BB_1, BB_2, BB_3, etc. Les poussées élémentaires sur les parties BB_1, B_1B_2, B_2B_3, etc., s'obtiendront par différence.

Ainsi la poussée p_3 sur B_2B_3 est la différence entre les poussées totales sur les parements BB_2 et BB_3.

Si les divisions BB_1, B_1B_2, etc., sont assez petites, on pourra admettre que les poussées élémentaires p_1, p_2, etc., sur ces divisions sont appliquées en leurs milieux. On aura alors la poussée totale P en grandeur et *en position* en cherchant, par la statique graphique, la résultante de toutes les poussées partielles p_1, p_2, etc.

Cette construction est longue et pénible. Dans la pratique on se sert d'une remarque faite par Poncelet qui a montré que, dans les profils courants, le point d'application de la poussée n'est jamais plus haut que le tiers du parement à partir de sa base. On se place donc dans les conditions les plus défavorables en admettant que le point d'application de la poussée est au tiers du parement à partir de sa base. C'est ce que l'on fait dans la pratique.

TABLE DES MATIÈRES